I sistemi di voto

Marco Greco

6 novembre 2009

Voto vs Negoziato

- **Processo formalizzato** in cui più attori decisionali **scelgono** una **soluzione** ad un problema di comune interesse

- Il negoziato è un **processo** in cui due o più attori decisionali **cercano** una **soluzione soddisfacente** ad un problema di comune interesse

Definizioni

- Insieme finito di decisori G = {1, 2,...p}
- Insieme finito di alternative A = {a, b...n}
- ∀ decisore i ha un ordinamento di preferenza ≽ su A.
  - ≽ indica un ordine debole: a ≽b significa che a è "almeno tanto buona quanto b"

- Tale ordinamento è
  - Completo (date a e b, il decisore sa dire se una è preferita all'altra, o se sono indifferenti)
  - Transitivo (se a ≽ b e b ≽ c allora a ≽ c)

Trasformare preferenze individuali in globali

- Come passare da un profilo di preferenze $\{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_i, \ldots, \succcurlyeq_p\}$ ad un ordinamento di scelta sociale ($\succcurlyeq_g$)?

Occorre definire una funzione

$g: \{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_i, \ldots, \succcurlyeq_p\} \rightarrow (\succcurlyeq_g)$

detta **costituzione**

Unanimità

$$a \succcurlyeq_g b \Leftrightarrow a \succcurlyeq_i b \ \forall i$$

- Unico meccanismo di voto che rispetta l'efficienza paretiana

- Procedura completa:
  - si valutano tutte le alternative contemporaneamente
- Procedura ordinaria:
  - si valutano le alternative secondo un'agenda

- Favorisce il mantenimento dello status quo
- *Esempio: Consiglio Europeo, prima del Trattato di Nizza*

Dall’unanimità alla maggioranza

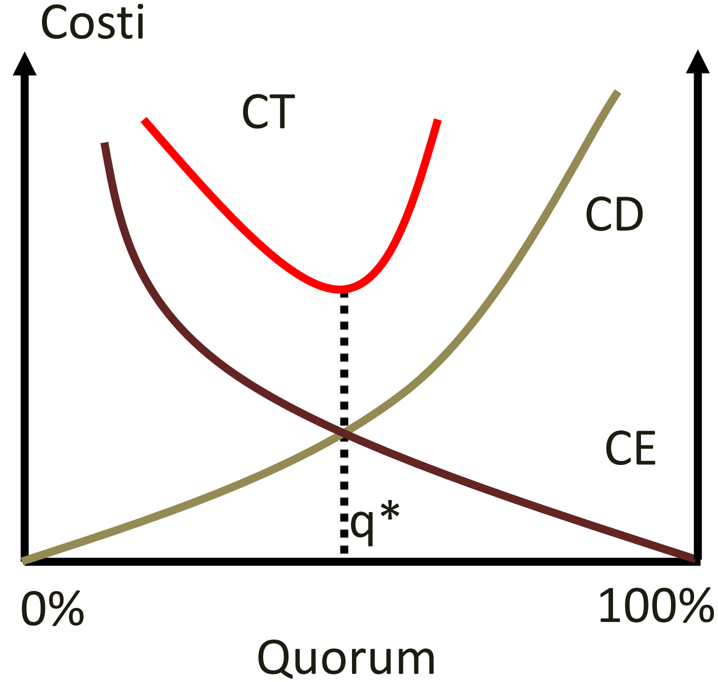
Costi esterni: costi sopportati dall’opposizione

Costi decisionali: costi per le risorse impiegate per raggiungere l’accordo

Buchanan e Tullock (1972)

Maggioranza

<u>Assoluta</u> (50% + 1 degli aventi diritto)
<u>Qualificata</u> (66,7% degli aventi diritto)
<u>Relativa</u> (maggior numero di voti)
<u>Semplice</u> (50% + 1 dei votanti)



Metodo di Condorcet (1785)

$$a \succcurlyeq_G b \Leftrightarrow |\{i: a \succcurlyeq_i b\}| > |\{i: b \succcurlyeq_i a\}|$$

L'alternativa che, confrontandosi singolarmente con ciascuna delle altre, vince tutti i confronti è la **Condorcet winner**

Se esiste un Condorcet winner, esso è unico

Ordine preferenza	1°	2°	3°
Decisore 1	a	c	b
Decisore 2	b	c	a
Decisore 3	b	a	c

$b \succcurlyeq_G a$, $a \succcurlyeq_G c$, $b \succcurlyeq_G c \Rightarrow$ **b** è il C.W.

Paradosso di Condorcet

Ordine preferenza	**1°**	**2°**	**3°**
Decisore 1	a	c	b
Decisore 2	b	a	c
Decisore 3	c	b	a

$b \succcurlyeq_G a,\ a \succcurlyeq_G c,\ c \succcurlyeq_G b \Rightarrow$ chi è il Condorcet winner?

Soluzione possibile

Ricorso a procedura ordinaria: voto su coppie di alternative, scartare la perdente e passare a nuovo confronto a coppie, fino all'ultimo

Problemi: importanza agenda, voto strategico

Preferenze unimodali

Data l'alternativa preferita, le altre alternative sono disposte in ordine di preferenza sulla base della distanza dall'alternativa preferita

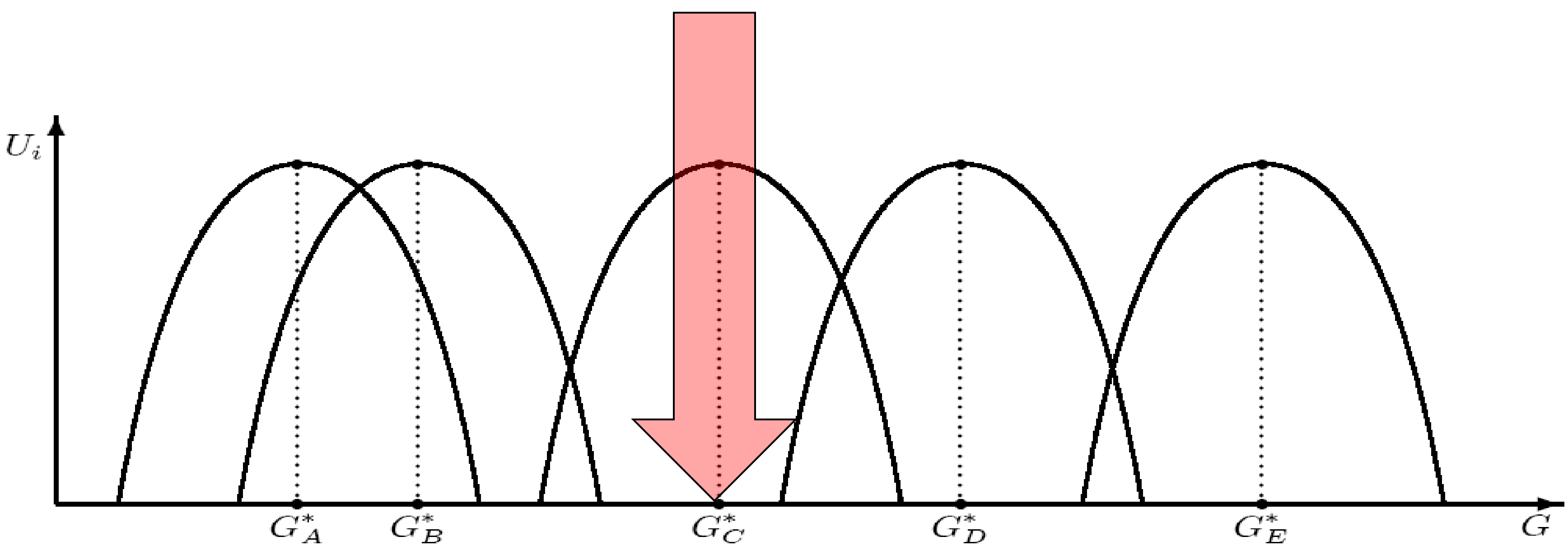
Ordine preferenza	1°	2°	3°
Decisore 1	100	50	30
Decisore 2	50	30	100
Decisore 3	30	50	100

- Teorema di Black (CS, ma non CN) Se le preferenze sono unimodali, allora esiste un Condorcet winner

Teorema dell’elettore mediano

Approfondimento del teorema di Black

(CS, ma non CN) Se le preferenze di tutti i votanti sono unimodali, allora esiste un Condorcet winner e l’alternativa che batte tutte le altre nel voto a maggioranza semplice è l’alternativa preferita dall’elettore mediano.



Preferenze multimodali

Ordine preferenza	**1°**	**2°**	**3°**
Decisore 1	100	50	30
Decisore 2	50	30	100
Decisore 3	30	100	50

In presenza di preferenze multimodali, può emergere il paradosso di Condorcet!!!

Teorema di Sen

(CS, ma non CN) Date tre alternative e tre o più decisori (n = 3, p ≥ 3), se tutti i decisori concordano che una delle tre alternative **non è la migliore**, oppure se tutti concordano che una delle tre alternative **non è quella mediana**, oppure se tutti concordano che una delle tre alternative **non è la peggiore**, allora esiste un Condorcet winner

Ordine preferenza	1°	2°	3°
Decisore 1	100	30	50
Decisore 2	50	30	100
Decisore 3	30	50	100

In questo caso, tutti concordano che 30 non è la soluzione peggiore

Meccanismi di voto multiplo

Meccanismi in cui i decisori esprimono direttamente il loro ordinamento di preferenza

- Maggioritario a turno unico
- Maggioritario a doppio turno
- Metodo delle eliminazioni successive
- Metodo di Borda
- Voto per approvazione

Maggioritario a turno unico

1. Dall'ordinamento di preferenza del decisore i si attribuisce all'alternativa x un punteggio $P_i(x) = 1$ se questa è preferita a tutte le altre, altrimenti $P_i(x) = 0$
2. Per ogni alternativa x si sommano i punteggi dei p decisori: $P(x) = \Sigma_i P_i(x)$
3. Vince l'alternativa x con Max $\{P(x)\}$

Vantaggi	Svantaggi
Un solo turno di votazione	Vincitore con maggioranza relativa
- Facile da capire	- Voto strategico (voto al meno peggio!)
- Indicato per sistemi bipolari	- Vulnerabile in sistemi non bipolari

Maggioritario a doppio turno

1. Dall'ordinamento di preferenza del decisore i si attribuisce all'alternativa x un punteggio $P_i(x) = 1$ se questa è preferita a tutte le altre, altrimenti $P_i(x) = 0$
2. Per ogni alternativa x si sommano i punteggi dei p decisori: $P(x) = \Sigma_i P_i(x)$
3. Se Max $\{P(x)\} > \{1/2\}*p$ allora vince l'alternativa x altrimenti le due alternative con P(x) maggiori vanno al turno di ballottaggio, in cui i decisori votano la preferita tra le due

Vantaggi

- Vincitore con maggioranza semplice
- Facile da capire
- Indicato per sistemi quasi bipolari

Svantaggi

- Due turni di votazione
- Voto strategico
- Vulnerabile in sistemi frammentati

Le elezioni francesi del 2002

Il sistema non rispecchia gli ordinamenti di preferenza completi dei votanti!!!

Infatti, al ballottaggio Chirac prese l'82%, contro il 18% di Le Pen

Area politica	Candidato	%voti
Estrema Destra	Le Pen	16.86
	Mégret	2.34
Centro Destra	Chirac	19.88
	Bayrou	6.84
	Madelin	3.91
	Boutin	1.19
Socialisti	Jospin	16.18
	Chevenement	5.33
	Taubira	2.32
Verdi	Mamère	5.25
Comunisti	Hue	3.37
Estrema Sinistra	Laguiller	5.72
	Besancenot	4.25
	Gluckstein	0.47
Altri	Saint-Josse	4.23
	Lepage	1.88

Eliminazioni successive

- Ogni decisore esprime il suo ordinamento di preferenza completo
- Dall'ordinamento di preferenza del decisore i si attribuisce all'alternativa x un punteggio $P_i(x) = 1$ se questa è preferita a tutte le altre, altrimenti $P_i(x) = 0$
- Per ogni alternativa x si sommano i punteggi dei p decisori: $P(x) = \Sigma_i P_i(x)$
- Si elimina la preferenza con Min $\{P(x)\}$
- Di conseguenza, si modifica l'ordinamento di preferenza dei decisori e si riparte con il punto 2
- Vince l'alternativa che rimane dopo l'ultima eliminazione

Eliminazioni successive

	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0
a	1	1	5	5	4	4	3	5	2	5	4
b	2	2	2	2	2	2	2	2	1	4	2
c	3	4	1	1	5	5	4	3	5	1	5
d	4	5	4	4	1	1	5	4	4	2	1
e	5	3	3	3	3	3	1	1	3	3	3

	1^a
a	2
b	1
c	3
d	3
e	2

Metodo di Borda

1. A seconda della preferenza di ciascun decisore, si attribuisce un punteggio B ad ogni alternativa x, secondo questo criterio: $B_i(x) = |\{y: x \succcurlyeq_i y\}|$
2. Per ogni alternativa si sommano i punteggi dei p decisori $B(x) = \Sigma_i B_i(x)$
3. Vince l'alternativa x con Max {B(x)}

	a	**b**	**c**	**d**
D1	4	3	2	1
D2	2	1	4	3
D3	1	4	3	2
	7	8	<u>9</u>	6

Dipendenza dalle alternative irrilevanti

	a	b	c	d
D1	4	3	2	1
D2	2	1	4	3
D3	1	4	3	2
	7	8	9	6

	a	b	c
1	3	2	1
2	2	1	3
3	1	3	2
	6	6	6

Voto per approvazione

1. Ogni decisore i attribuisce all'alternativa x un punteggio $AV_i(x) = 1$ se la approva, altrimenti $AV_i(x) = 0$
2. Per ogni alternativa x si sommano i punteggi dei p decisori: $AV(x) = \Sigma_i AV_i\ (x)$
3. Vince l'alternativa x con Max $\{AV(x)\}$

Vantaggi

- Dà maggiori possibilità di scelta (permette di votare anche alternative perdenti in partenza)
- Favorisce alternative meno estreme

Svantaggi

- Favorisce alternative "moderate" e non tutela minoranze
- Non permette di esprimere l'ordinamento

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
b	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
c	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
d	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
e	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2

28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2
4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	2	2
3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	3	3	3	3
2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1

Il risultato dipende dal meccanismo!!!

Maggioritario a t. unico	**a = 18**	b = 12	c = 10	d = 9	e = 6
Maggioritario a due turni					
1° turno	a = 18	b = 12	c = 10	d = 9	e = 6
2° turno	a = 18	**b = 37**			
Eliminazioni successive					
1° turno	a = 18	b =12	c = 10	d = 9	e = 6
2° turno	a = 18	b = 16	c = 12	d = 9	
3° turno	a = 18	b = 16	c = 21		
4° turno	a = 18		**c = 37**		
Metodo di Condorcet					
Vittorie righe \ v. colonne	a	b	c	d	e
a	-	18	18	18	18
b	37	-	16	26	22
c	37	39	-	12	19
d	37	29	43	-	27
e	37	33	36	28	-

Teorema di Arrow (1952)

Dato un profilo di preferenze $P = \{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_i, \ldots, \succcurlyeq_p\}$ ed un ordinamento di scelta sociale ($\succcurlyeq_g$), entrambi completi e transitivi, esiste una sola costituzione **g** che rispetta i seguenti assiomi:

1) Non banalità
2) Dominio universale
3) Ordine debole
4) Rilevanza binaria
5) Pareto efficienza
6) Razionalità

È la dittatura!!!

Assiomi di Arrow (1)

Assioma di non banalità

$p \geq 2, n \geq 3$

Assioma del dominio universale

$\exists$ g per $\forall$ P

Assioma dell'ordine debole

$\forall \succcurlyeq_i$ e $\succcurlyeq_g$ sono ordini deboli

Assiomi di Arrow (2)

Assioma di rilevanza binaria (anche indipendenza dalle alternative irrilevanti)

a $\succcurlyeq_g$ *b* dipende esclusivamente dalle relazioni $\{\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_i, \ldots, \succcurlyeq_p\}$ di preferenza tra *a* e *b*

Assioma di unanimità o di Pareto

Se $a \succcurlyeq_i b$ per $\forall i \Rightarrow a \succcurlyeq_G b$

Assioma di razionalità

g deve fornire un ordinamento completo e transitivo di tutte le alternative. Vale a dire, se $a \succcurlyeq_G b$ e $b \succcurlyeq_G c$, allora $a \succcurlyeq_G c$

Definizioni

Definizione di dittatore

Un dittatore è un decisore D: $\forall$ (a, b), se $a \succcurlyeq_D$ b, si ha che $a \succcurlyeq_G b$

Definizione di insieme decisivo

Un insieme $V \subseteq G$ è decisivo per una coppia (a, b) se, per $\forall$ P: $a \succcurlyeq_i b$, $\forall i \in V$, si ha che $a \succcurlyeq_G b$

Definizione di insieme decisivo minimale

Un insieme V decisivo per (a, b) è minimale se non esiste un altro insieme decisivo W per una qualsiasi coppia (c, d), con $|W| < |V|$

Critiche al teorema di Arrow

- Se rilassiamo l’assioma di non banalità oppure quello di dominio universale (considerando profili di preferenze unimodali), allora c’è un meccanismo di voto perfetto, la maggioranza assoluta.
- Se si rilassa l’assioma di rilevanza binaria, il meccanismo di Borda soddisfa tutti gli assiomi.
- Non considera intensità delle preferenze, analizzato dall’approccio metrico
- Non considera problema del voto strategico, analizzato dal teorema di Gibbard-Satterthwaite

Conclusioni finali

“La democrazia è la peggiore forma di governo al mondo… eccetto tutte le altre”.

Winston Churchill

“Non conta la gente che vota, ma piuttosto la gente che conta i voti”

Joseph Stalin