

3. Vettori, Spazi Vettoriali e Matrici

Vettori e Spazi Vettoriali

Operazioni tra vettori

Basi

Trasformazioni ed Operatori

Operazioni tra Matrici

Autovalori ed autovettori

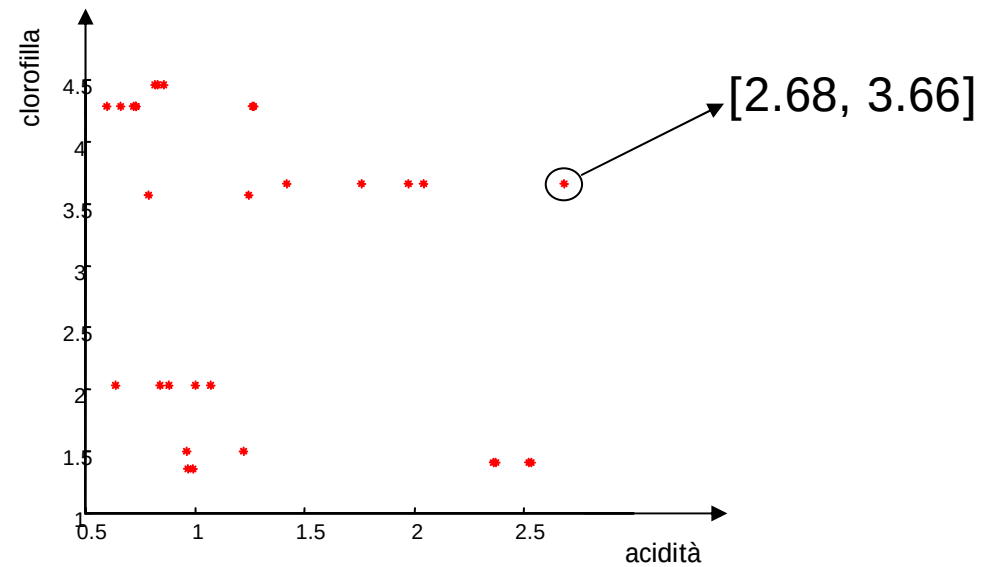
Forme quadratiche, quadriche e quadriche in forma canonica

Vettori e Matrici

- Un vettore è un insieme ordinato di grandezze
- Ogni vettore è un punto in uno spazio vettoriale
- Lo spazio vettoriale è identificato da una base di vettori di riferimento, gli elementi dei vettori sono quindi le coordinate nella base di riferimento.
- Ogni dato multivariato è descritto in uno spazio vettoriale (cartesiano) in cui gli assi di base sono le grandezze che compongono il vettore stesso.
- Una matrice è una collezione di vettori riga.

Esempio 2D

Acidità clorofilla



Notazione di vettori e matrici

- Vettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_d]$$

- Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1d} & a_{2d} & \cdots & a_{nd} \end{bmatrix}$$

Operazioni tra vettori

- Prodotto interno o scalare

$$\langle x, y \rangle = x^T y = y^T x = \sum_{k=1}^d x_k y_k$$

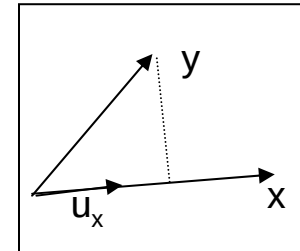
- Modulo (Norma) di un vettore (Teorema di Pitagora, distanza Euclidea)

$$|x| = x^T x = \sum_{k=1}^d x_k^2$$

- Proiezione ortogonale di y su x

$$(y^T u_x) u_x$$

- u_x versore di x (stessa direzione e modulo unitario)



- Angolo tra vettori

$$\cos \vartheta_{xy} = \frac{x^T y}{|x| \cdot |y|}$$

Operazioni tra vettori

- Due vettori sono detti:
 - Ortogonali se $x^T y = 0$
 - Ortonormali se $x^T y = 0$ e $|x| = |y| = 1$
- Un insieme di n vettori è detto **linearmente dipendente** se:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = 0 \text{ per } a_k \neq 0$$

- Un insieme di n vettori è detto **linearmente indipendente** se:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = 0 \text{ per } a_k = 0 \quad \forall k$$

Operazioni tra matrici

- Il determinante di una matrice quadrata $A_{d \times d}$ è definito come:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik} \cdot \det(A_{ik}) \cdot (-1)^{k+i}$$

- Dove A_{ik} è la matrice minore di A ottenuta rimuovendo da A la i -esima riga e la k -esima colonna
- La traccia di A è la somma degli elementi diagonali

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^d a_{kk}$$

- Il rango di A è il numero massimo di righe (o colonne) linearmente indipendenti
- Una matrice quadrata è detta non-singolare se il rango coincide con la dimensione
 - Una matrice non singolare ha determinante non nullo

Prodotto tra matrici prodotto righe per colonne

$$A_{m \cdot n} \cdot B_{n \cdot q} = C_{m \cdot q}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au + bx & av + by & aw + bz \\ cu + dx & cv + dy & cw + dz \end{bmatrix}$$

Operazioni tra matrici

- Matrici speciali:

– **Identità:** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ **Diagonale:** $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- Una matrice quadrata è detta **ortonormale** se $A^T A = A A^T = I$
- La matrice **inversa** di una matrice quadrata è definita come: $A^{-1} A = A A^{-1} = I$
 - La matrice inversa esiste se e solo se A è non singolare
- La matrice **pseudo-inversa** estende il concetto di matrice inversa a matrici rettangolari o a matrici quadrate singolari

$$A^+ = \left[A^T A \right]^{-1} A^T \quad \text{con} \quad A^+ A = I$$

Spazio vettoriale

- Lo spazio a dimensione n dove risiedono vettori a dimensione n è detto spazio vettoriale.
- Un insieme di vettori $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ forma una base dello spazio vettoriale se qualunque vettore può essere rappresentato come combinazione lineare dei $\{u_i\}$

$$x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

- I coefficienti $\{a_i\}$ sono le componenti di x nella base $\{u\}$
 - Per formare una base i vettori $\{u\}$ devono essere linearmente indipendenti
- Una base è detta:
 - $$\text{ortogonale: } u_i^T u_j \begin{cases} \neq 0 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$
 - $$\text{ortonormale: } u_i^T u_j \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$
 - Gli assi cartesiani sono un esempio di base ortonormale
- Data una base qualunque si può costruire una base ortonormale con il procedimento di proiezione di Gram-Schmidt
- La distanza tra due vettori dello spazio è definita come il modulo del vettore differenza (distanza euclidea)

Trasformazioni Lineari

- Una trasformazione lineare è una regola che associa ad ogni vettore dello spazio X^N un vettore nello spazio Y^M , la trasformazione lineare è rappresentata da una matrice

- Dato un vettore $x \in X$ il corrispondente vettore $y \in Y$ è dato da:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{M \times 1} = A_{M \times N} X_{N \times 1}$$

- Le dimensioni degli spazi di partenza e di arrivo sono generalmente diverse
- Una trasformazione lineare rappresentata da una matrice A è detta ortonormale se $AA^T = A^T A = I$
 - Implica che $A^T = A^{-1}$
 - Una trasformazione ortonormale preserva il modulo del vettore

$$|y| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{(Ax)^T (Ax)} = \sqrt{x^T A^T A x} = \sqrt{x^T x} = |x|$$

- Quindi una matrice ortonormale compie una operazione di rotazione del sistema di riferimento
- I vettori riga di una trasformazione ortonormale formano una base ortonormale.

Autovettori ed autovalori

- Un vettore v è autovettore della matrice $A_{N \times N}$ se esiste uno scalare (autovalore) λ tale che:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

- Calcolo dell'autovalore:

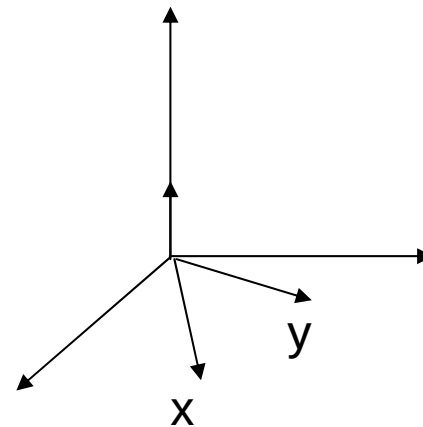
$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

- La matrice formata dagli autovettori colonna è detta matrice modale
- Proprietà:
 - Se A è non singolare tutti gli autovalori sono non zero
 - Se A è reale e simmetrica tutti gli autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali

Intepretazione degli autovettori

- Se A è una matrice che descrive una trasformazione lineare allora un autovettore rappresenta una direzione invariante nello spazio vettoriale
- Esempio:
 - Matrice di rotazione che ruota vettori nello spazio 3D attorno all'asse z ha come singolo autovettore $[0 \ 0 \ 1]$ e 1 come autovalore corrispondente

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Forme quadratiche

- L'equazione generica di una curva quadratica (es. ellisse) è generalmente scritta in forma implicita

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 = k$$

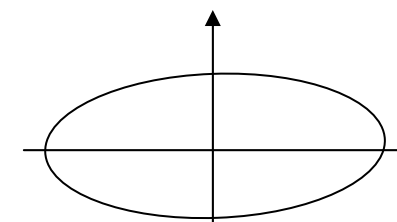
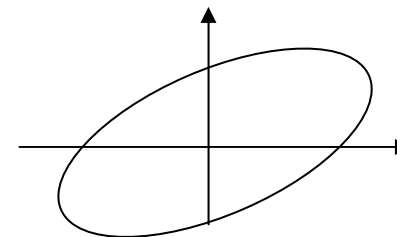
- E' noto come la equazione si semplifichi con un cambiamento di base da x,y agli assi principali dell'ellisse

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 = k$$

- L'equazione della quadrica si può scrivere in forma matriciale come:

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli autovettori della matrice associata e gli autovalori sono proprio i termini λ che compaiono nella equazione canonica.



Esempio di calcolo di autovettori e autovalori

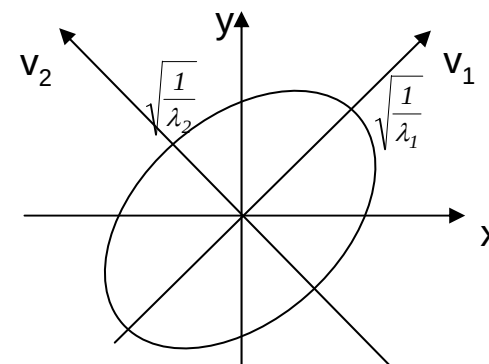
$$13 \cdot x^2 - 10 \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow (A - \lambda \cdot I) \cdot v = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 13 - \lambda & -5 \\ -5 & 13 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (13 - \lambda)^2 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 26 \cdot \lambda + 144 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 8; \lambda_2 = 18}$$



$$(A - \lambda_1 \cdot I) \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 - 8 & -5 \\ -5 & 13 - 8 \end{bmatrix} \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot v_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$(A - \lambda_2 \cdot I) \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 - 18 & -5 \\ -5 & 13 - 18 \end{bmatrix} \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\lambda_1 \cdot v_1^2 + \lambda_2 \cdot v_2^2 = 1$$

Quadriche in forma canonica

- Gli autovettori della matrice generatrice della quadrica formano una base nella cui base la quadrica è scritta in forma canonica, quindi la matrice generatrice diventa diagonale.

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot xy + c \cdot y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 \cdot u^2 + \lambda_2 \cdot w^2 = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

- Le quadriche non definiscono solo le ellissi il segno degli autovalori consente di discriminare il tipo di curva:
 - ☐ $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ ellisse
 - ☐ $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ iperbole
 - ☐ $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ retta