

Cap.2

Teorema del Viriale

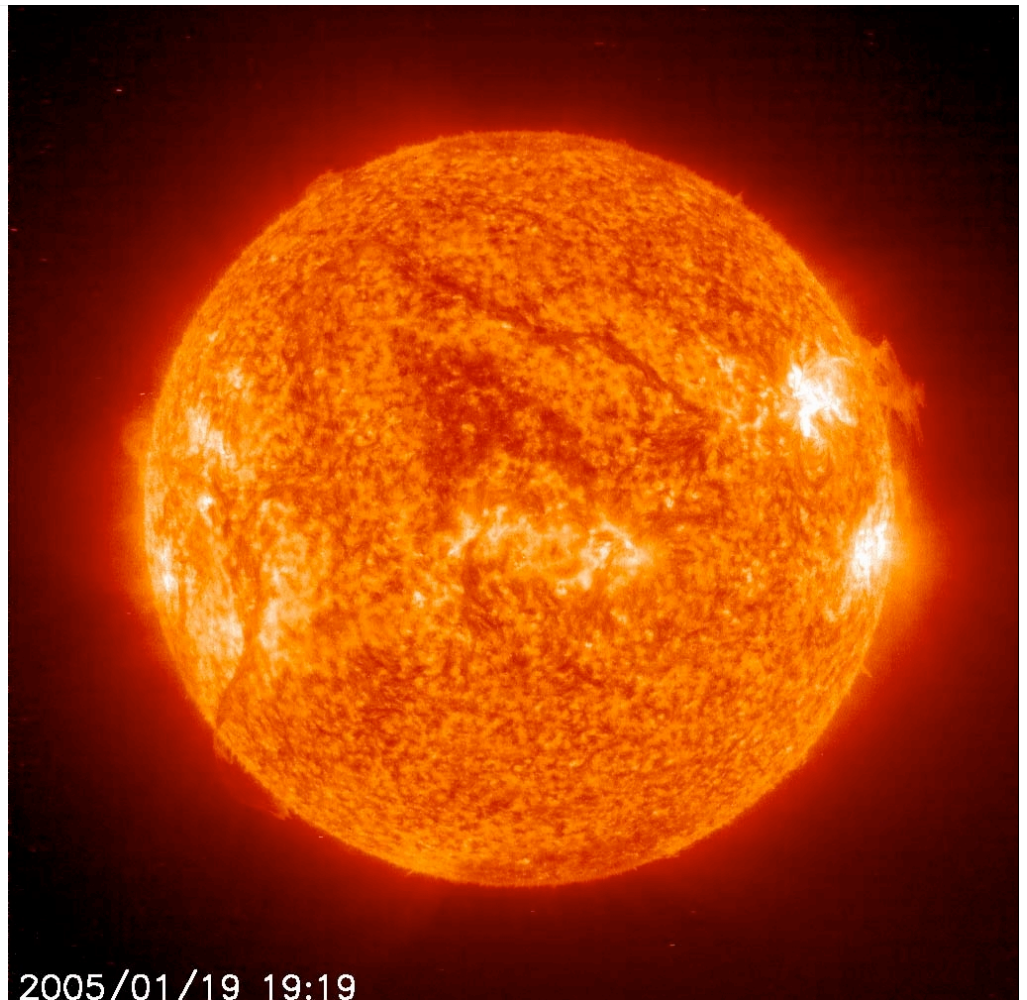
si applica ai più svariati sistemi di N corpi: $N \sim 10 - \infty$

- Stelle (fluido, $N \rightarrow \infty$)
- Ammassi di stelle ($N^* \sim 10^2 - 10^6$) (aperti-globulari)
- Galassie ($N^* \sim 10^{11}$)
- Gruppi di galassie ($N_g \sim 10 - 10^2$)
- Ammassi di galassie ($N_g \sim 10^3$)

semplice relazione dinamica, in condizioni
di equilibrio lega quantità globali: M, R, $\langle v^2 \rangle$

$$2\overline{T} + \overline{U} = 0$$

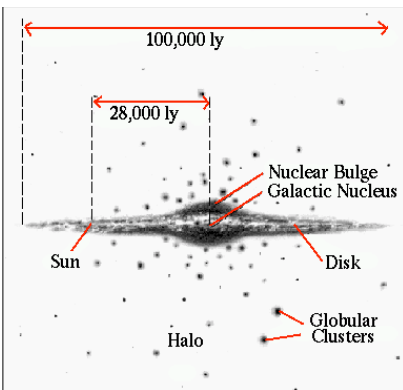
il Sole



ammasso aperto M67 in Cancer
a distanza $D=830$ pc

$N \sim 500$ stelle





ammasso globulare M13 in Hercules

$N \sim 10^6$ stelle



la galassia
ellittica M87
=NGC4486
in Virgo

$$M \sim 5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$$

$$D \sim 20 \text{ Mpc}$$

$N \sim 10^{11}$ stelle



il gruppo di galassie Leo I

N~10 galassie



l'Ammasso di galassie Perseus

N~1000 galassie

$M \sim 10^{15} M_{\odot}$
 $D \sim 80 \text{ Mpc}$



la descrizione completa di un sistema di N corpi in equilibrio dinamico (legato) richiederebbe $3 \times 2N$ integrali esatti (a t qualunque).

nei sistemi isolati:

moto e posiz baricentro $\rightarrow$ 6 integrali primi

$$\mathbf{J} \rightarrow 3$$

$$E=T+U \rightarrow 1$$

$$10 \ll 6N, \text{ non basta}$$

per una descrizione statistica viene in aiuto il Teorema del Viriale:

esprime equilibrio statistico, di insieme

fornisce relazione tra quantità globali $M, R, \langle v^2 \rangle$

l'energia cinetica è una funzione omogenea di grado 2 delle velocità:

$$\mathcal{T}(v_i^2) = O_2(\mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

allora:
$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 2\mathcal{T}$$

(teorema di Eulero sulle funzioni omogenee)

definiamo i

momenti cinetici: $\mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{v}_i}$

allora si ha:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2\mathcal{T} + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

questo
termine in
media si annulla

$$0 = 2\overline{\mathcal{T}} + \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

media

$$\overline{F} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt F(t)$$

se $F(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}$ con $\mathcal{F}$ limitata ($\Delta \mathcal{F} \neq \infty$)

si ha: $\overline{F} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \Delta \mathcal{F} \rightarrow 0$

allora, se: (a) moto in regione limitata ($\Delta r_i \neq \infty$)
(b) v_i finite

$$\Rightarrow \overline{\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i} = 0, \quad 2\overline{\mathcal{T}} = -\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

$$2\overline{\mathcal{T}} = -\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

se le forze $\mathbf{F}$ ammettono un potenziale $\mathcal{U}$

$$\mathbf{F}_i \equiv -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}_i} = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (2^{\text{a}} \text{ legge di Newton})$$

$$\text{allora: } 2\overline{\mathcal{T}} = \overline{\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}_i}}$$

se il potenziale $\mathcal{U}$ è omogeneo di grado k

$$\mathcal{U}(r) = O_k(r) \Rightarrow \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}_i} = k\mathcal{U}$$

(teorema di Eulero sulle funzioni omogenee)

$$2\overline{\mathcal{T}} = k\overline{\mathcal{U}}$$

caso gravitazionale: $k = -1$

inoltre, conservazione dell'energia:

$$\mathcal{T} + \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{T}} = -\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\overline{\mathcal{U}}$$

$$2\overline{\mathcal{T}} + \overline{\mathcal{U}} = 0$$

condizioni:

$\Delta t \gg \tau_{oscill}$ dei vari corpi nel potenziale $\mathcal{U}$

$\Delta t \ll \tau_{evol}$ di (eventuale) variazione globale dell'equilibrio

tempo caratteristico di ogni sistema
dominato da forze gravitazionali pure:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{soluzione dimensionale, approssimata:}$$
$$\frac{r}{t^2} \simeq \frac{GM}{r^2} \quad t \simeq \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{-1/2}$$

$$t_{ff} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad \text{tempo di free-fall } t_{ff} \text{ o tempo dinamico } t_d$$

scale di tempo

esempio: 2 corpi (pianeta attorno al sole etc)

$$3^a \text{ legge di Keplero} \quad \frac{R^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$
$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{GM/R^3}} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$$

[qui ρ è una "densità media" determinata dalla massa del corpo dominante e dal volume occupato dall'orbita]

esempio: scala temporale dell'Universo

vedremo che anche
in questo caso si ha:

$$t_d \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ anni}$$

esempio: tempi di oscillazione in sistemi Virializzati

$$2\overline{T} = -\overline{U} \longrightarrow 2T = Nm\langle v^2 \rangle = M\sigma^2 = -U = f \frac{GM^2}{R}$$

[approssimaz masse uguali]

$$\sigma^2 = 3 \langle v_r^2 \rangle = \frac{3}{5} \frac{GM}{R}$$

calcolo del fattore di
forma per un caso a
densità uniforme

velocità quadratica media rispetto
al centro di massa del sistema
= "dispersione di velocità"

$$\begin{aligned} U &= -G \int \frac{M dM}{r} = G \int \frac{\frac{4\pi}{3} \rho r^3 4\pi \rho r^2 dr}{r} = \\ &= -\frac{16\pi^2}{3} G \rho^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

$$\langle v_r^2 \rangle = \frac{1}{5} \frac{GM}{R} = \frac{1}{5} \frac{4\pi}{3} G \rho R^2 \simeq G \rho R^2$$

$$t_d = \frac{R}{\sqrt{\langle v_r^2 \rangle}} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} = \tau_{oscill}$$

applicazioni del Teorema del Viriale

$$2\overline{T} + \overline{U} = 0$$

$$\sigma^2 = \langle v^2 \rangle = f \frac{GM}{R}, \quad f \sim 1 \quad M, R \Leftrightarrow \sigma^2, T$$

f = fattore di forma, per la sfera uniforme = 3/5

stelle 

$$T \sim 10^6 - 10^8 \text{ K} \quad (\text{dip. da } M \sim 10^{-1} - 10^2 M_\odot)$$

ammassi
globulari 

$$\sigma \sim 30 \text{ km/s} \quad M \sim 10^6 M_\odot \quad R \sim 2 \text{ pc}$$

galassie 

$$\sigma \sim 10^2 \text{ km/s} \quad M \sim 10^{11} M_\odot \quad R \sim 20 \text{ kpc}$$

ammassi
di galassie 

$$\sigma \sim 10^3 \text{ km/s} \quad M \sim 10^{15} M_\odot \quad R \sim 2 \text{ Mpc}$$

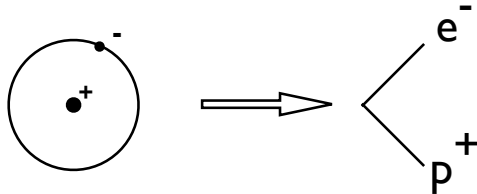
plasma stellare

a $T \sim 10^6$ K il gas stellare (prevalentemente H)
è completamente ionizzato

potenziale di ionizzazione di H: 13.6 eV

$$\rightarrow T \sim \frac{1}{1.4 \cdot 10^{-16}} \times 13.6 \times 1.6 \cdot 10^{-12} \sim 1.5 \cdot 10^5 \text{ K}$$

per T superiori:



con $n_e = n_p$
 $M_{\text{gas}} \simeq m_p N_p$

in condizioni di equilibrio termico:

$$\text{energia } p^+ = 3/2 kT = \text{energia } e^-$$

$$\text{energia per coppia} = 2 \cdot 3/2 kT$$

$$\text{energia totale} = 2 \cdot 3/2 kT \cdot N_p$$

temperatura interna del Sole

$$2 \times \textcircled{2} \times \frac{3}{2} \textcircled{N} k\bar{T} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad \leftarrow \text{t. d. viriale}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 protoni + # protoni = M/m_p
 elettroni

$$k\bar{T} \simeq \frac{1}{10} \frac{GMm_p}{R}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{1.4 \cdot 10^{-16}} \frac{1}{10} \frac{6.7 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{33} \times 1.7 \cdot 10^{-24}}{7 \cdot 10^{10}} \sim 2 \cdot 10^6 \text{ K}$$

correzioni: $\left. \begin{array}{l} m_p \rightarrow \bar{A}m_p \sim 1.6m_p \\ M \rightarrow M_c \sim 0.3M_{\odot} \\ R \rightarrow R_c \sim 0.1R_{\odot} \end{array} \right\} \times 5$

$$T_c \simeq 10^7 \text{ K}$$

Teorema del Viriale: derivazione a fluido

equazione di equilibrio idrostatico $\frac{dp}{dr} = -\rho G \frac{M(r)}{r^2}$

$$\rightarrow \times 4\pi r^3 \quad \rightarrow \int dr$$

primo membro

$$\begin{aligned} \int_0^R 4\pi r^3 \frac{dp}{dr} dr &= \left[4\pi r^3 \int \frac{dp}{dr} dr \right]_0^R - \int_0^R \left(\int \frac{dp}{dr} dr \right) 3 \cdot 4\pi r^2 dr = \\ &= [4\pi r^3 p]_0^R - \int_0^R 3p 4\pi r^2 dr = 4\pi r^3 p - 4\pi \int_0^R 3p r^2 dr = -2T \end{aligned}$$

$$\left[\varepsilon_k = \frac{p}{(\gamma - 1)} = \frac{f}{2} n k T, \quad \gamma = 1 + \frac{2}{f} \right]$$

f = # gradi libertà

secondo membro

$$\begin{aligned} \int_0^R -\rho G \frac{M(r)}{r^2} \times 4\pi r^3 dr &= \int_0^R -G \frac{M(r)}{r} \rho 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_0^R -G \frac{M(r)}{r} dM(r) = \int d\mathcal{U} = \mathcal{U} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2T = \mathcal{U}$$

Teorema del Viriale, forma discreta

ripartiamo da: $2\bar{T} - \overline{\sum_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{r}_i}} = 0$

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{d_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad \rightarrow \quad \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right)$$

$$2\bar{T} + \overline{\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{d_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{r}_i} = 0$$

consideriamo coppia k, l
2 termini: 1) i=k, j=l
2) i=l, j=k

$$\begin{aligned} &\frac{Gm_k m_l}{d_{kl}^3} [(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{r}_k + (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \cdot \mathbf{r}_l] = \\ &= \frac{Gm_k m_l}{d_{kl}^3} (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k) \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) = -\frac{Gm_k m_l}{d_{kl}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\bar{T} - \overline{\sum_{coppie} \frac{Gm_i m_j}{d_{ij}}} = 0$$

$$\bar{U} = - \overline{\sum_{coppie} \frac{Gm_i m_j}{d_{ij}}}$$

energia potenziale:

energia per separare all' ∞ i componenti

per masse uguali: $\mathcal{U} = -Gm^2 \left\langle \frac{1}{d} \right\rangle \times \# \text{ coppie di } N \text{ oggetti}$

$$\frac{N(N-1)}{2} \simeq \frac{N^2}{2}$$

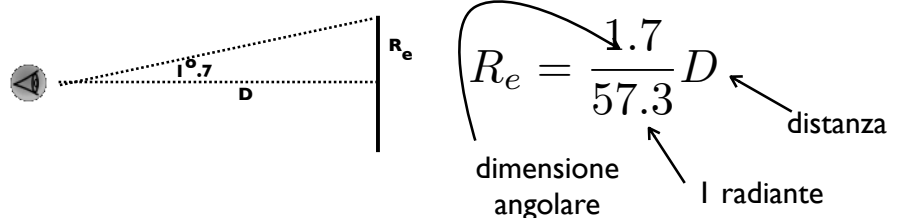
$$\Rightarrow M \langle v^2 \rangle = G \frac{N^2}{2} m^2 \left\langle \frac{1}{d} \right\rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = G \frac{M}{2} \left\langle \frac{1}{d} \right\rangle \equiv \frac{GM}{R_e} \quad \text{con} \quad \frac{1}{R_e} \equiv \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{d} \right\rangle$$

$$\langle v_r^2 \rangle = \frac{GM}{3R_e}$$

ammassi di galassie, es: Coma Cluster

dato: $R_e \sim 1^{\circ}.7$



per stimare la distanza dobbiamo anticipare dei concetti di cosmologia:

legge di Hubble

$$v = H_o D \quad H_o \sim 70 - 75 \text{ km/s/Mpc}$$

$$D = \frac{v}{H_o} = \frac{c}{H_o} z$$

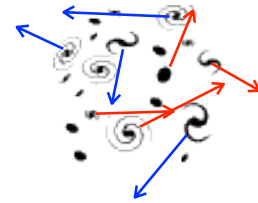
$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \simeq \frac{v}{c}$$

redshift=spostamento verso il rosso

Coma Cluster

$$D = \frac{4000}{H_o/75} \times 0.023 \simeq 93 \frac{1}{H_o/75} \text{ Mpc}$$

$$\langle z \rangle = 0.023$$



le galassie dell'ammasso hanno varie velocità. interessa la velocità radiale e il redshift del centro di massa

$$R_e = \frac{1.7}{57.3} D = \frac{1.7}{57.3} 93 \frac{1}{H_o/75} = 2.8 \frac{1}{H_o/75} \text{ Mpc}$$

Teorema del Viriale: $\langle v_r^2 \rangle = \frac{GM}{3R_e}$

$$M = \frac{3\langle v_r^2 \rangle R_e}{G} = \frac{3 \times (10^{3+5})^2 \times 9 \cdot 10^{24}}{6.7 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{15} M_\odot \frac{1}{H_o/75}$$

$$\gg 1000 \times M_G \simeq 1000 \times 2 \cdot 10^{11} M_\odot$$

!!

come mai?
materia oscura !

gas caldi e ionizzati = “plasmi”

gas alta T: “plasma”

es: H a $T \gg 13.6 \text{ eV}$, e^- , p^+ liberi $kT \gg e^2/\bar{d} = e^2 n^{1/3}$

4^o stato della materia, per T crescente:
solido, liquido, gas, plasma

nel Sole ($n \sim 10^{24} \text{ cm}^{-3}$, $T \sim 10^7 \text{ K}$)

$$kT = 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ erg} \gg e^2 n^{1/3} \simeq 3 \cdot 10^{-11} \text{ erg}$$

fattore $\sim 10^2$

intracluster plasma (ICP) nei raggi X

$$L_X \propto n^2 R^3 \sqrt{T} \approx 10^{42} - 10^{45} \text{ erg/s}$$

$$n \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$$

$$T \sim 10^8 \text{ K}$$

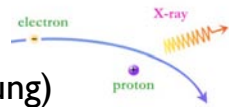
si può stimare anche
dal Viriale

$$kT \simeq \frac{1}{10} \frac{GMm_p}{R} \propto \langle v_r^2 \rangle$$

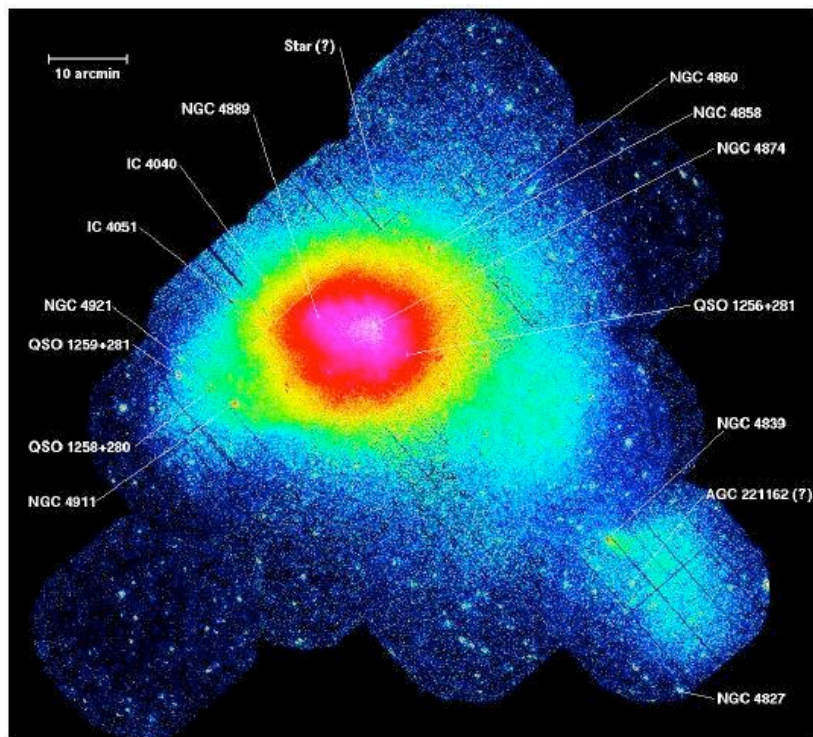
$$\simeq 1.4 \cdot 10^{-8} \text{ erg}$$

$$>> e^2 n^{1/3} \simeq 3 \cdot 10^{-20} \text{ erg}$$

fattore 10^{12}



(bremsstrahlung)

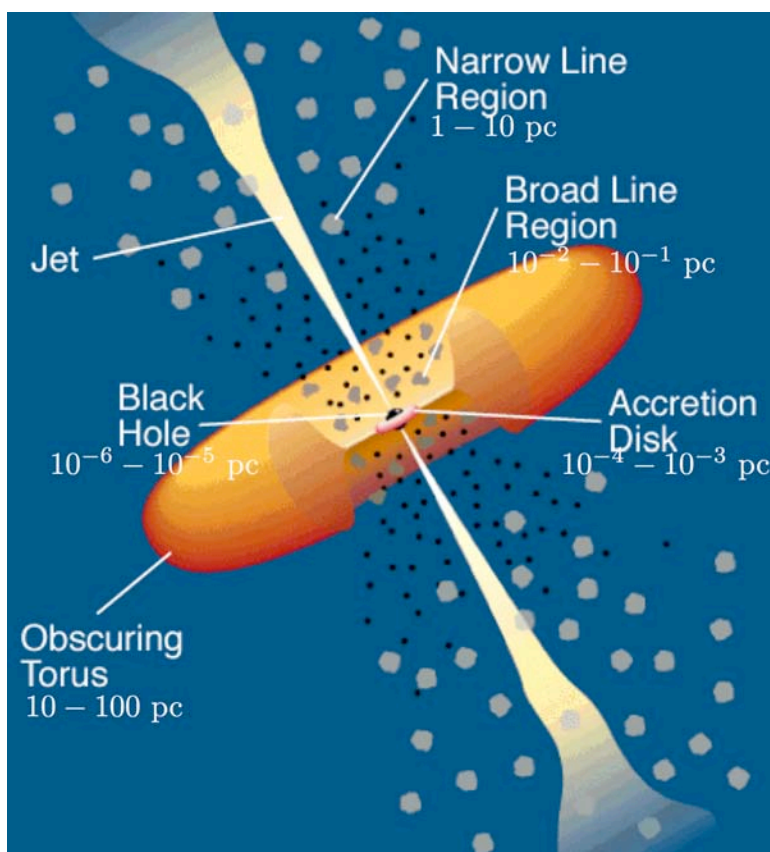


Coma Cluster of galaxies

Image courtesy of U. Briel, MPE Garching, Germany

European Space Agency

Nuclei Galattici Attivi e Quasar



NLR

$$\sigma \sim 300 \text{ km/s}, \quad R \sim 1 - 10 \text{ pc}$$

BLR

$$\sigma \sim 3000 \text{ km/s}, \quad R \sim 0.01 - 0.1 \text{ pc}$$

BH

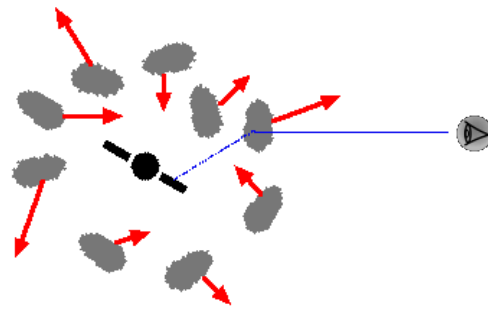
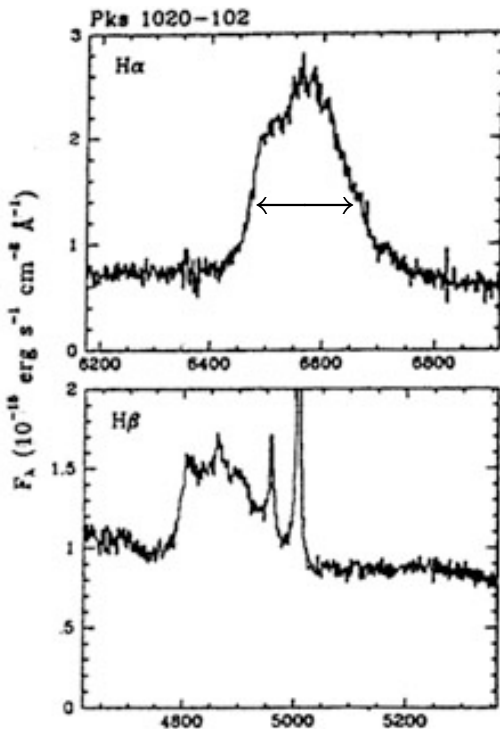
$$M = M_{BH}$$

$$\text{Viriale: } \sigma^2 \sim \frac{GM}{R}$$

$$M_{BH} \sim \frac{\sigma^2 R}{G} \approx 10^7 - 10^9 M_{\odot}$$

allargamento delle righe di emissione

è dovuto al moto delle nubi



non può essere dovuto
alla temperatura del gas

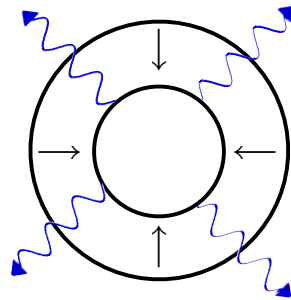
$$T \sim 10^4 \text{ K} \rightarrow v \sim \left(\frac{kT}{m_p} \right)^{1/2} \approx 10 \text{ km/s}$$

variazioni lente dell'equilibrio

dal Teorema del Viriale e dalla conservazione dell'energia:

$$\left. \begin{array}{l} 2\mathcal{T} + \mathcal{U} = 0 \\ \mathcal{T} + \mathcal{U} = \mathcal{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{T} = -\frac{\mathcal{U}}{2} = -\mathcal{E}$$

se l'equilibrio varia in modo lento su $\Delta t > \tau_{oscill}$
a causa di perdite di energia totale
(irraggiamento, espulsione di corpi, etc)



$$\begin{array}{ll} d\mathcal{E} < 0 \Rightarrow d\mathcal{U} < 0 & \text{contrazione} \\ & d\mathcal{T} > 0 \quad \text{riscaldamento} \end{array} \quad \mathcal{U} = -f \frac{GM}{R}$$

esempio: formazione delle stelle: contrazione della protostella,
riscaldamento fino ad "accendere" il combustibile nucleare
 $4H \rightarrow He^4 + 2\nu + 24.5 \text{ MeV} \quad (T \sim 10^7 \text{ K})$

esempio: esaurito H interno, ogni stella con $M \gtrsim M_{\odot}$ subisce nuova
contrazione e riscaldamento fino all'ignizione del prossimo
combustibile $He^4 \rightarrow C^{12}, O^{16}, \dots \quad (T \sim 10^8 \text{ K})$

Teorema del Viriale non stazionario ($\tau_{evol} \simeq \tau_{oscill}$)

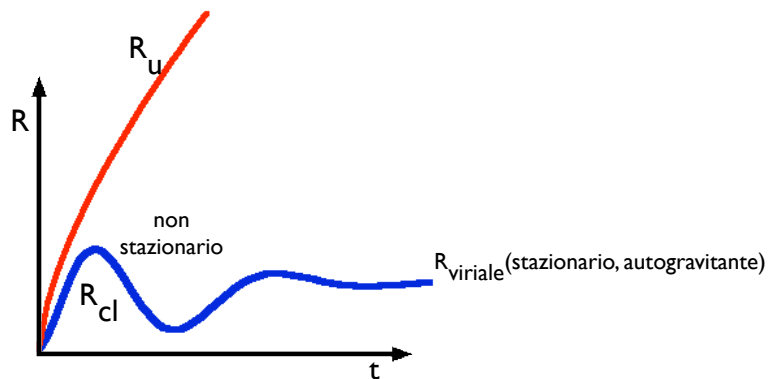
$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i = 2\mathcal{T} + \mathcal{U} \neq 0$$

[$k = -1$, caso gravitazionale
altrimenti $2\mathcal{T} - k\mathcal{U}$]

$$2\mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \ddot{I}_p$$

con $I_p \equiv \sum_i m_i r_i^2$

momento di inerzia
polare (o centrale)



Clausius, 1870:

la vis viva media di un sistema è uguale al suo Viriale

vis viva = forza viva = energia cinetica = $\mathcal{T}$

$$\text{Viriale di Clausius} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2} \overline{\mathcal{U}}$$

da vires (plurale di vis)

commento sulle medie

operativamente non si può fare la media $\overline{F}$ su tempi $t > \tau_{oscill} \simeq 10^6 - 10^9$ anni

si ricorre all'ipotesi ergodica:

nello spazio delle fasi il punto a $6N$ dimensioni che rappresenta il sistema trascorre in ogni regione di volume V un tempo $t \propto V$

$\overline{media}$ su $t \hat{=} \langle media \rangle$ nello spazio delle fasi, sulle configurazioni istantanee