

Cap. 3

stelle normali

Gravità bilanciata dalla pressione cinetica

$$\begin{array}{ll} \text{equilibrio} & \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \\ & \text{differenziale} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\mathcal{T} = -f \frac{GM^2}{R} \\ \text{integrato} \end{array}$$

$$T_{\odot} = \frac{1}{k} \frac{GMm_p}{10R} \sim 10^7 \text{ K}$$

ma la stella irraggia quindi perde energia
se non compensata si ha un cambio di equilibrio e un'evoluzione

contrazione a T crescente, su scala

$$t_{KH} = \frac{\mathcal{T}}{L_{\odot}} = \frac{2 \frac{3}{2} \frac{M}{m_p} kT}{L_{\odot}} = \frac{3 \times 2 \cdot 10^{33} \times 1.4 \cdot 10^{-16} \times 10^7}{4 \cdot 10^{33} \times 1.7 \cdot 10^{-24}} \approx 10^{15} \text{ s} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ yr}$$

tempo di Kelvin-Helmholtz

ruolo dell'energia termonucleare

intervengono le reazioni termonucleari nel core stellare a compensare le perdite ed assicurare lunga vita alle stelle con $M \lesssim M_{\odot}$

$$\text{Sole: } R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} \text{ cm} \simeq 2 \text{ s} - \text{luce} \quad \text{fotoni in volo libero}$$
$$\bar{\rho} \sim 1 \text{ g/cm}^3$$

che accadrebbe se il Sole fosse soggetto solo a forze gravitazionali pure?

$$t_{ff} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}} \simeq 1 \text{ h}$$

ma sappiamo (geologia, datazioni radio-attive etc)
che il Sistema Solare si è formato circa 4.55 Gyr fa

contrazione graduale con liberazione di energia gravitazionale?

$$d\mathcal{E} = -d\mathcal{T} = \frac{d\mathcal{U}}{2} \quad t_{KH} \simeq \frac{GM^2}{RL_{\odot}} \simeq 3 \cdot 10^7 \text{ yr}$$

non basta

energia chimica?

reazioni chimiche: $\sim 1 \text{ eV/atomo}$

$$\frac{\Delta E}{E} \hat{=} \frac{\Delta M}{M} \simeq \frac{1 \text{ eV}}{940 \text{ MeV}} \sim 10^{-9}$$

energia nucleare?

$$4H \rightarrow He^4 \Rightarrow \frac{24.5}{4} \simeq 6 \text{ MeV/nucleone}$$

$$\text{efficienza } \eta_* = \frac{6}{940} \simeq 6 \cdot 10^{-3} \quad \text{durata } t_* = \frac{\eta_* M c^2}{L} > 10^{10} \text{ yr}$$

produzione di energia: fissione ?

fusione $\longrightarrow$ resa più alta, H abbondante

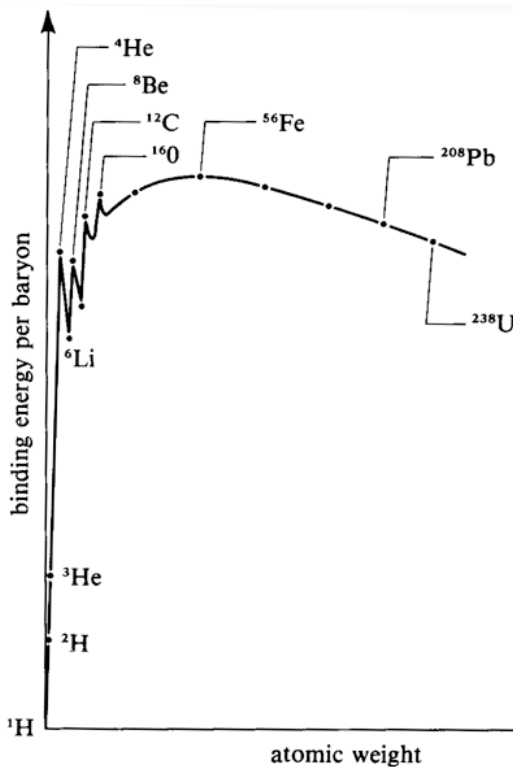
non esplosiva: rilascio lento

in condizioni controllate dalla gravità

come avviene? Alte T generate

dalla contrazione gravitazionale

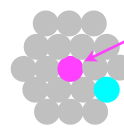
energia di legame per nucleone



- salita: forze nucleari attrattive

$$\text{vol} \propto A, \text{ sup} \propto A^{2/3}$$

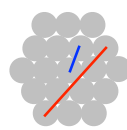
(per piccoli A aumenta la frazione di nucleoni di superficie, le forze nucleari sono meno efficienti)



nucleone interno: interagisce con un maggior numero di nucleoni vicini

nucleone di superficie: interagisce con un minor numero di nucleoni vicini

- discesa: forze coulombiane repulsive



le interazioni forti sono a corto

raggio: all'aumentare delle dimensioni del nucleo diventa relativamente più importante la repulsione coulombiana, a lungo raggio

- picchi: nuclei particolarmente stabili per A multiplo di 4

- max: $\sim \text{Fe}^{56}$

tempi caratteristici

$$t_* = \frac{\eta_* M c^2}{L} \approx \frac{6 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{33} \times 9 \cdot 10^{20}}{4 \cdot 10^{33} \times 3 \cdot 10^7} \sim 10^{11} \text{ yr}$$

ma: la massa che partecipa al bruciamento dell'H è solo quella del core $\sim 0.1 M$

$$M \rightarrow M_c = 0.1 M$$

- $t_* \rightarrow 0.1 \times 10^{11} = 10^{10} \text{ yr}$

- $t_{ff} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \simeq 1 \text{ h}$

- $t_{KH} \simeq \frac{GM^2}{RL_\odot} \simeq 3 \cdot 10^7 \text{ yr}$

$$t_{ff} \ll t_{KH} \ll t_*$$

questo garantisce controllo perfetto e stabilità della fusione termonucleare nelle stelle.

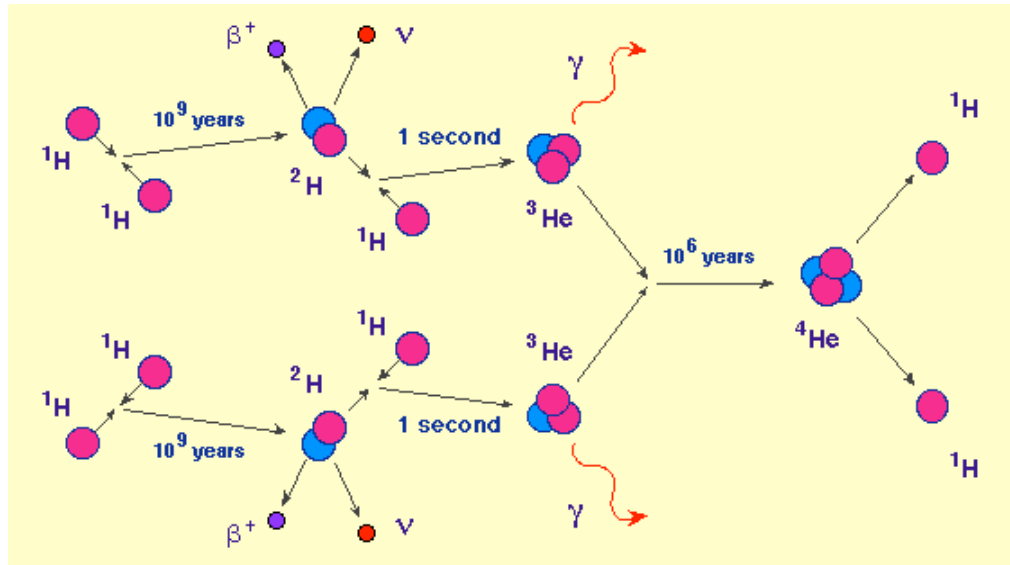
infatti un eventuale eccesso di energia nucleare prodotta fa sì che il core reagisca in $\sim 1 \text{ h}$ espandendosi; allora n e T diminuiscono (espansione adiabatica $T \propto n^{\gamma-1}$) e diminuisce il ritmo delle reazioni nucleari $r_{pp} \propto n^2 f(T)$ (con $f(T) \propto T^4$ o più ripido) e la fluttuazione muore

ignizione delle reazioni termonucleari

per $M \simeq M_{\odot}$ si innesca la **catena p-p**

$$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$$

$${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$$

$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$$


ignizione delle reazioni termonucleari

ma:

occorre avvicinare i p alla distanza in cui agiscono le interazioni forti

la T del Viriale sembra insufficiente per superare la repulsione elettrostatica (barriera Coulombiana)

$$T_{\odot} \simeq 10^7 \text{ K}$$

$$kT = 1.4 \cdot 10^{-9} \text{ erg} \simeq 1 \text{ keV}$$

$$\frac{e^2}{r_o} \simeq \frac{2.5 \cdot 10^{-19}}{2.8 \cdot 10^{-13}} \simeq 10^{-6} \text{ erg} \simeq 1 \text{ MeV} \gg kT$$

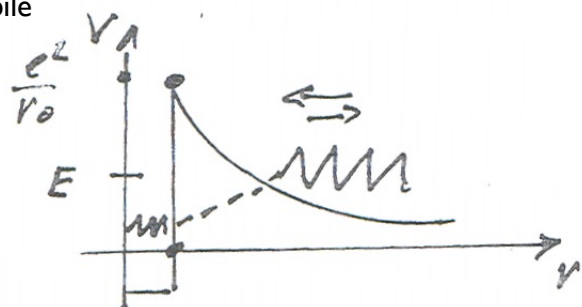
tuttavia:

- data l'energia media $3/2 kT$, la distribuzione di Maxwell contiene anche una coda di protoni più energetici $N(E) \propto e^{-E/kT}$
- interviene la Meccanica Quantistica che permette di penetrare una barriera classicamente insuperabile (**Effetto Tunnel**)

a basse energie la probabilità è

$$e^{-2\pi e^2 / \hbar v} \equiv e^{-bE^{-1/2}}$$

$$v = (2E/m_p)^{1/2}$$



picco di Gamow

i 2 fattori si combinano nel rate (#reazioni/s)

$$r_{pp} \propto n_p^2 (kT)^{-3/2} \int dE \sigma(E) E e^{-E/kT} e^{-bE^{-1/2}}$$

a basse energie $\sigma(E) \propto 1/E$

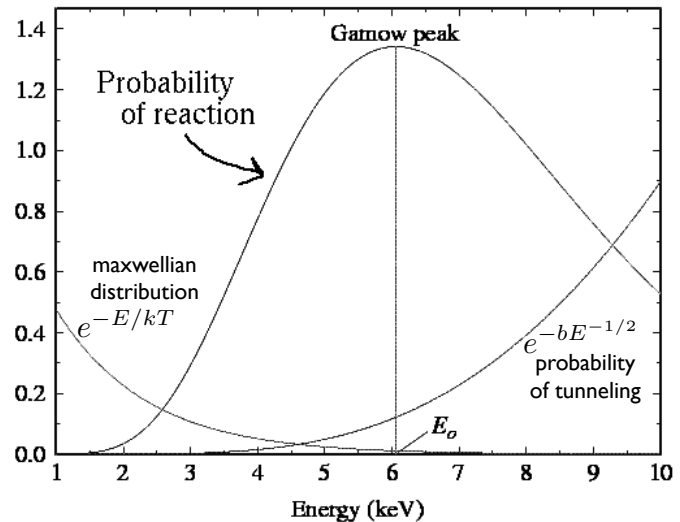
la funzione integranda ha un massimo per:

$$\frac{d}{dE} \left[e^{-E/kT} e^{-bE^{-1/2}} \right] = 0 =$$

$$= -\frac{1}{kT} e^{-E/kT} e^{-bE^{-1/2}} + e^{-E/kT} \frac{b}{2} E^{-3/2} e^{-bE^{-1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{bkT} = E^{-3/2}$$

$$E = E_o = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} = \left[\left(\frac{m_p}{2} \right)^{1/2} \frac{\pi e^2}{\hbar} kT \right]^{2/3} \simeq 6 \text{ keV}$$

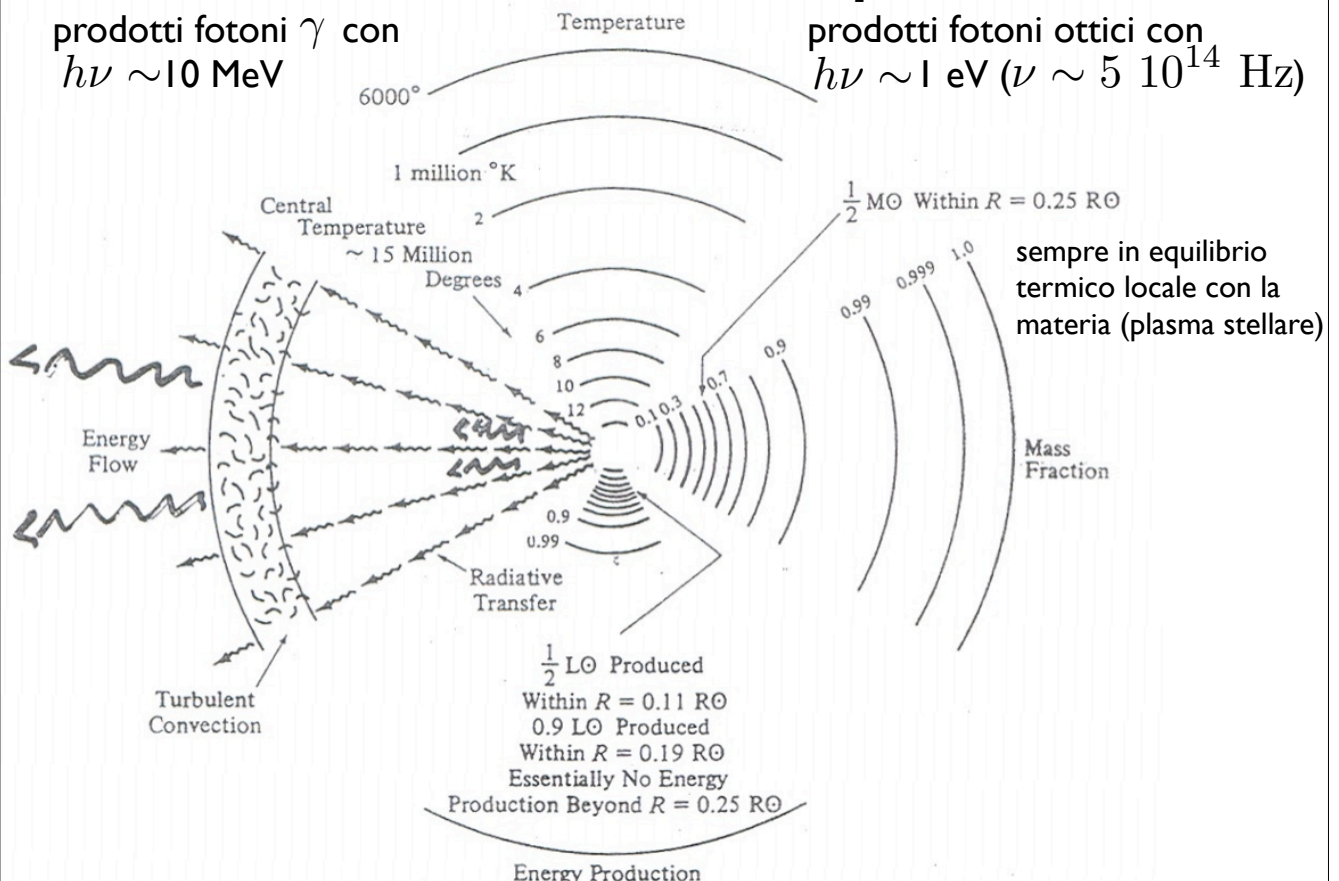


all'interno: $T_c \sim 10^7 \text{ K}$

prodotti fotoni γ con
 $h\nu \sim 10 \text{ MeV}$

alla superficie: $T_s \sim 6 \cdot 10^3 \text{ K}$

prodotti fotoni ottici con
 $h\nu \sim 1 \text{ eV}$ ($\nu \sim 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$)



corpo nero

radiazione in equilibrio con la materia

spettro di corpo nero:

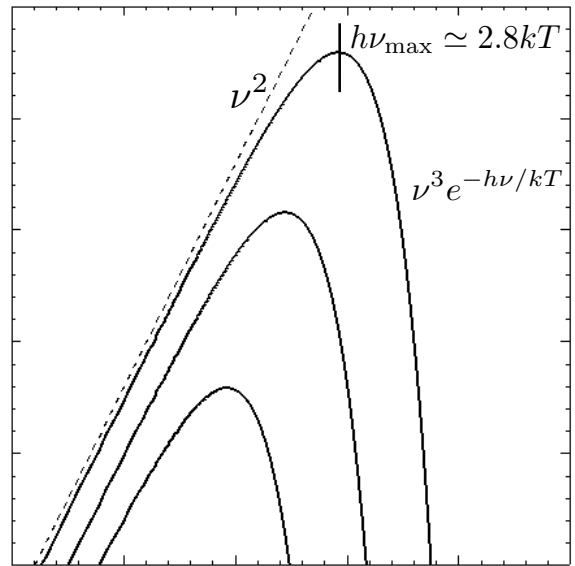
$$w(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

$$w(T) = \int_0^\infty w(\nu, T) d\nu = aT^4 = 7.6 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ erg/cm}^3$$

$$a = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^3 h^3} \quad \sigma = \frac{c}{4} a \quad \text{Stefan-Boltzmann}$$

$$F = \sigma T^4 \quad L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Rightarrow T_e$$

superficiale (effettiva)



$$\frac{dw}{d\nu} = \frac{3\nu^2(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) - \nu^3 \frac{h}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^2} = 0$$

$$3(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1) = \frac{h\nu}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

$$(3 - x) = 3e^{-x}$$

$$x \simeq 2.8$$

$$h\nu_{\max} = 2.8 kT$$

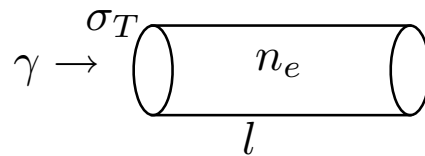
$$w(\nu, T) \xrightarrow{h\nu \ll kT} \frac{8\pi h}{c^3} kT \nu^2 \quad \text{Rayleigh-Jeans}$$

$$\xrightarrow{h\nu \gg kT} \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad \text{coda di Wien}$$

cammino libero medio dei fotoni per diffusione

$$\gamma + e = \gamma' + e'$$

probabilità di interazione di un γ con e : $p = n_e \sigma_T l$



$$p=1 \Rightarrow \lambda_{sc} = \frac{1}{n_e \sigma_T} \quad \text{cammino libero medio per diffusione}$$

$$t_{sc} = \frac{\lambda_{sc}}{c} = \frac{1}{n_e \sigma_T c} \quad \text{tempo medio fra 2 diffusioni}$$

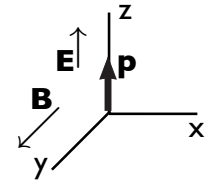
scattering Thomson

la più semplice interazione fotonica (dominante in plasma)

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{z} \quad \text{momento di dipolo}$$

$$\ddot{\mathbf{z}} \simeq -\frac{e}{m}\mathbf{E} \quad \ddot{\mathbf{p}} \simeq \frac{e^2}{m}\mathbf{E}$$

sua variazione



$$P = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{c^3} \quad \text{Larmor } (\dot{z} \ll c)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^4 E^2}{m^2 c^3} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 c \frac{E^2}{4\pi} \equiv \sigma_T F_{inc}$$

$$\text{nota: } r_o = \frac{e^2}{mc^2} \simeq 10^{-13} \text{ cm}$$

(raggio classico dell'elettrone)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

$$\text{da } \frac{e^2}{r_o} = mc^2$$

i fotoni effettuano un **random walk** per uscire dalla stella

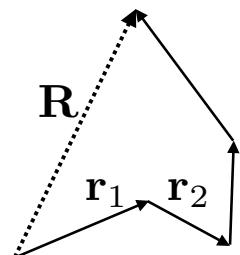
$$n_e \sim 10^{24} \text{ cm}^{-3} \quad \sigma_T \simeq 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \Rightarrow \lambda_{sc} \sim 1 \text{ cm} \ll R_\odot \sim 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$$



$$\text{in un random walk: } r^2 \sim N\lambda^2$$

infatti:

$$|\mathbf{R}^2| = |\mathbf{r}_1|^2 + |\mathbf{r}_2|^2 + \dots + |\mathbf{r}_n|^2 + 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \dots + 2\mathbf{r}_{n-1} \cdot \mathbf{r}_n$$



$$\text{numero delle diffusioni per uscire: } N = \frac{R_\odot^2}{\lambda^2}$$

$$\text{tempo necessario: } \Delta t = \frac{\lambda}{c} N = \frac{\lambda}{c} \frac{R^2}{\lambda^2} = \frac{R}{c} \frac{R}{\lambda} \sim 2 \text{ s} \frac{7 \cdot 10^{10}}{1} \lesssim 10^4 \text{ yr}$$

scattering Thomson (segue)

all'interno della stella: equilibrio termodinamico fotoni-elettroni-protoni

gradiente di temperatura dal centro alla superficie:

$$\frac{\Delta T}{\Delta R} \sim \frac{T_c - T_s}{R} \sim \frac{10^7}{10^{11}} \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$$

ad ogni interazione ($\Delta R \sim 1 \text{ cm}$) fotoni e particelle devono riequilibrare una frazione di energia



$$\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{10^{-4}}{10^7} \sim 10^{-11}$$

nel core

$$\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{10^{-4}}{6000} \sim 10^{-8}$$

alla superficie

fino alla superficie di ultimo scattering,

dove $n \ll 10^{24} \text{ cm}^{-3}$ ($\rho \ll 1 \text{ g/cm}^3$)

da cui i fotoni volano liberi nello spazio

conservando l'ultima distribuzione di corpo nero a $T \sim 6000 \text{ K}$

relazione L-M

in una stella calda ($M > M_\odot$) in cui scattering Thomson e pressione di radiazione dominano possiamo valutare la luminosità come rapporto fra l'energia della radiazione e il tempo necessario ai fotoni per uscire dalla stella:

$$L \simeq \frac{E}{\Delta t} = \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 a T^4}{\Delta t}$$

$$\Delta t \propto \frac{R^2}{\lambda} \Rightarrow L \propto R^3 T^4 \frac{\lambda}{R^2} = T^4 R \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{n \sigma_T} \propto \frac{1}{\rho} \sim \frac{R^3}{M}$$

$$kT \propto \frac{GM}{R} \text{ (Viriale)}$$

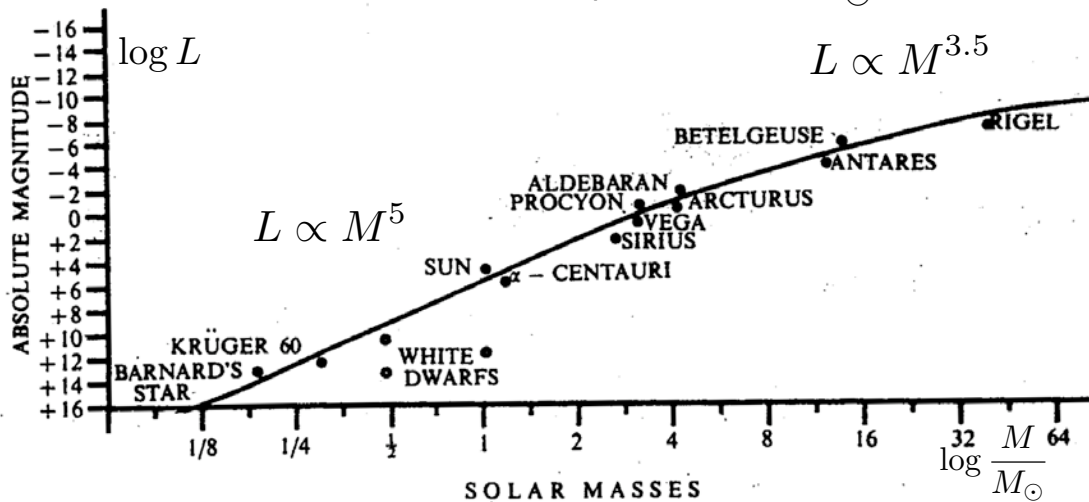
$$\Rightarrow L \propto \frac{M^4}{R^4} R \frac{R^3}{M} \propto M^3$$

relazione L-M

andamento di $L(M)$:

$$L \propto M^5 \quad \text{per } M \sim M_{\odot}$$

$$L \propto M^{3-3.5} \quad \text{per } M \gg M_{\odot}$$



stelle massive: luminose, calde, a breve vita (giovani)

$$\tau_* = \frac{\eta_* c^2 M}{L} \propto \frac{M}{L} \propto M^{-4} - M^{-2}$$

in superficie:

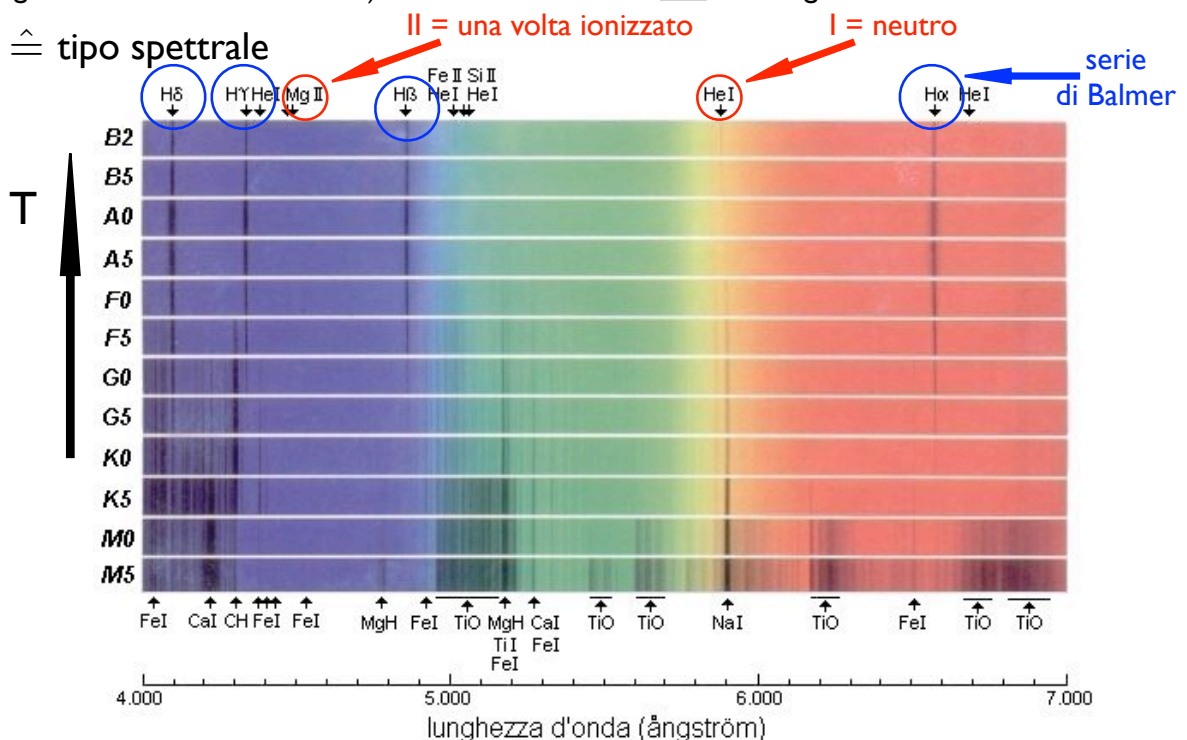
emissione delle stelle:

- continuo ~ corpo nero
- righe di assorbimento
(righe di emissione eccezionali)

temperature superficiali:

- in prima approssimazione, dal "colore" del continuo, Legge di Wien: $h\nu_{\max} = 2.8 kT$
- in modo fine, dalle righe di assorbimento

$T \hat{=}$ tipo spettrale

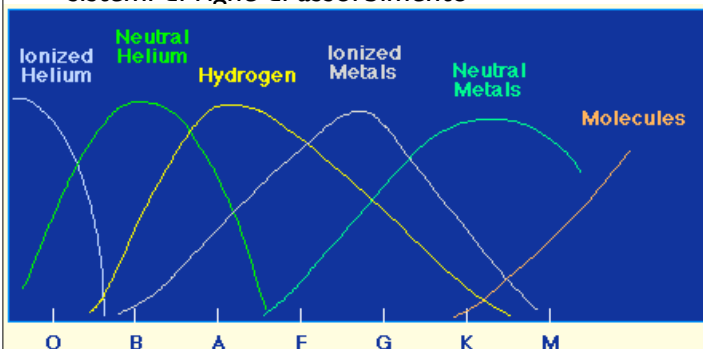


tipi spettrali

O, B, A, F, G, K, M

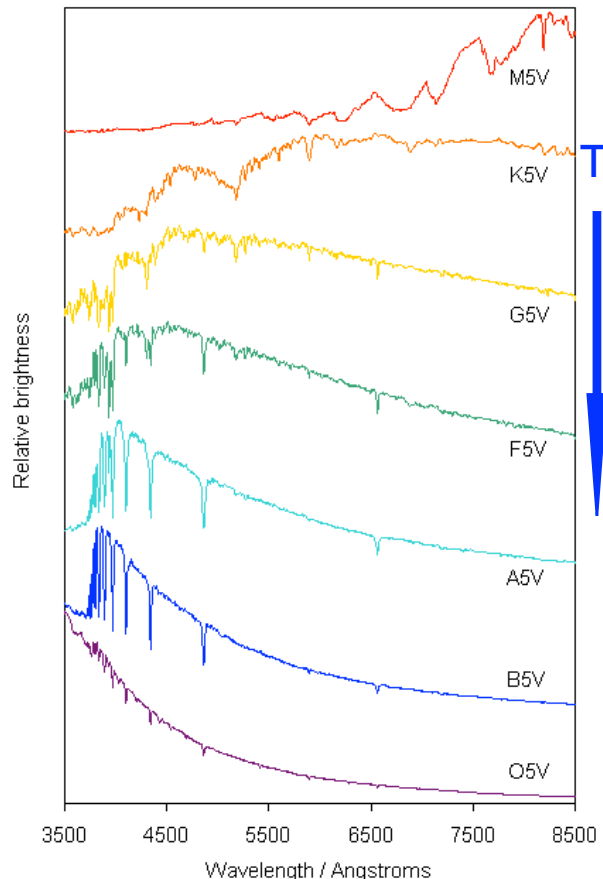
T $\leftarrow$

definiti secondo l'intensità dei diversi sistemi di righe di assorbimento



inoltre c'è una divisione fine decimale:
A0, A1, A2 ... B0, B1, B2 ... etc

il Sole è una stella G2V



V indica la classe di luminosità:
I, II, III, IV, V per luminosità decrescente

le serie dell'Idrogeno

$$h\nu_{mn} = Ry \left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$

$$Ry = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

$$\frac{hc}{Ry} = \frac{6.6 \cdot 10^{-27} \times 3 \cdot 10^{10}}{13.6 \times 1.6 \cdot 10^{-12}} \times 10^8 = 912 \text{ Å}$$

Lyman (m=1):

$$\nu_n = \frac{Ry}{h} \left[1 - \frac{1}{n^2} \right], \quad n > 1$$

$$\lambda_n = \frac{hc/Ry}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$L_\alpha, L_\beta, L_\gamma$: 1216, 1026, 972 Å
(ultravioletto)

Balmer (m=2):

$$\nu_n = \frac{Ry}{h} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right], \quad n > 2$$

$$\lambda_n = \frac{hc/Ry}{\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}}$$

$H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$: 6566, 4864, 4342 Å
(visibile)

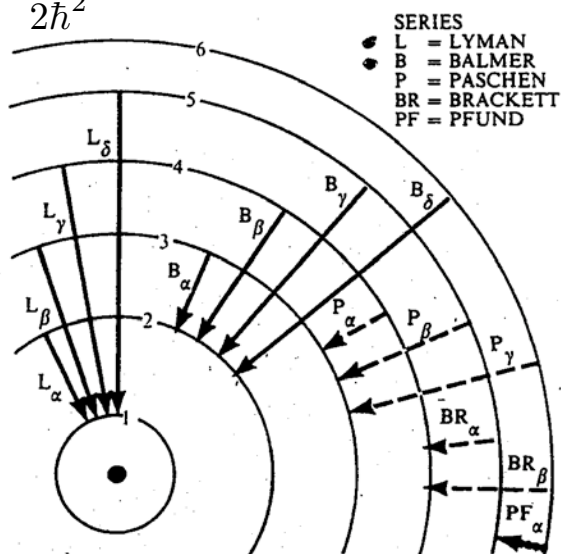


FIG. 18-8 The various series in the hydrogen spectrum arise when excited electrons in hydrogen atoms jump to lower levels, emitting photons of frequencies corresponding to the energy differences of the levels.

queste transizioni corrispondono alle righe di emissione.
le transizioni inverse corrispondono alle righe di assorbimento.

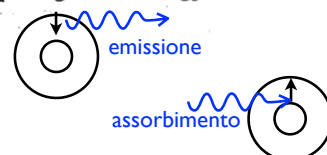
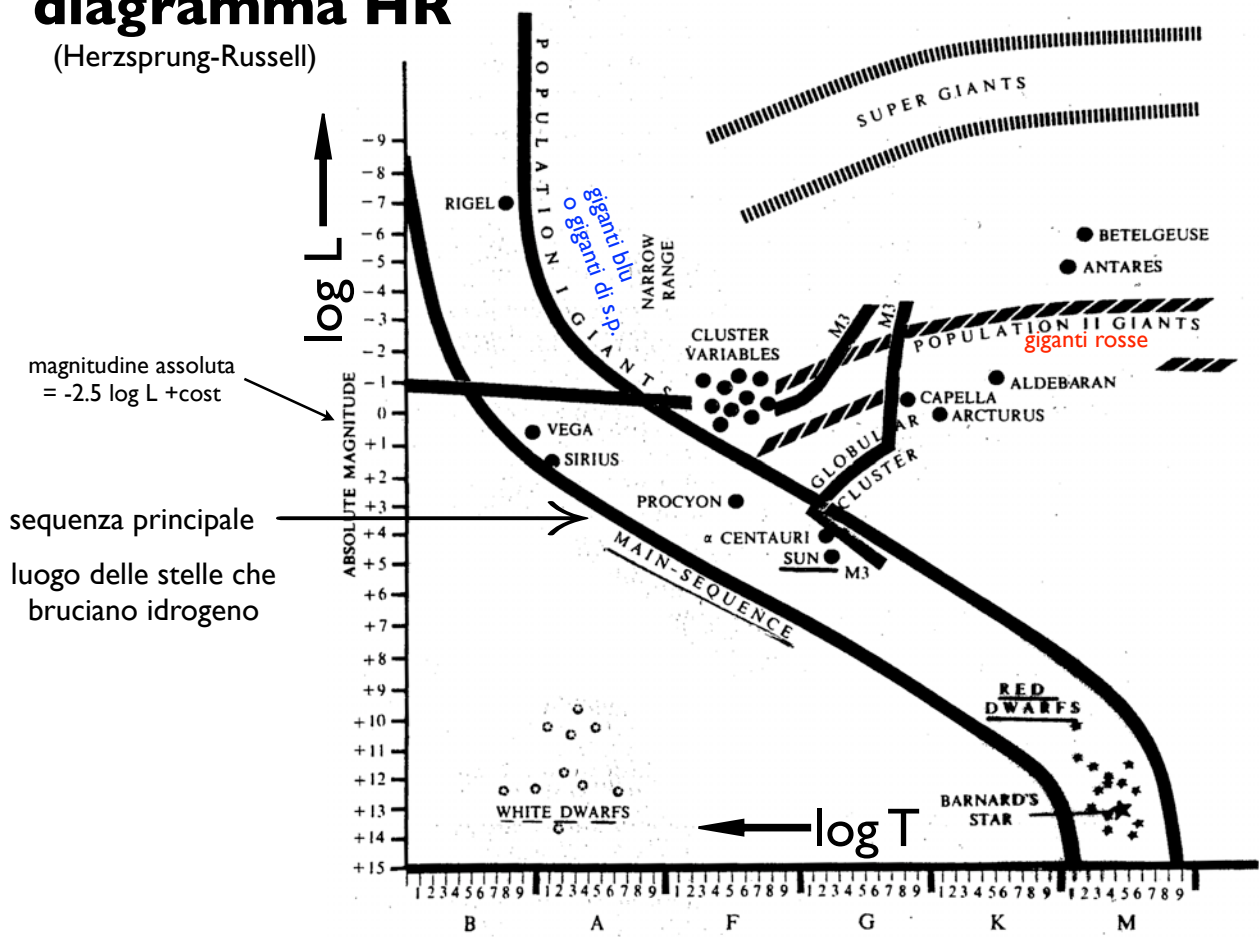


diagramma HR

(Herzsprung-Russell)

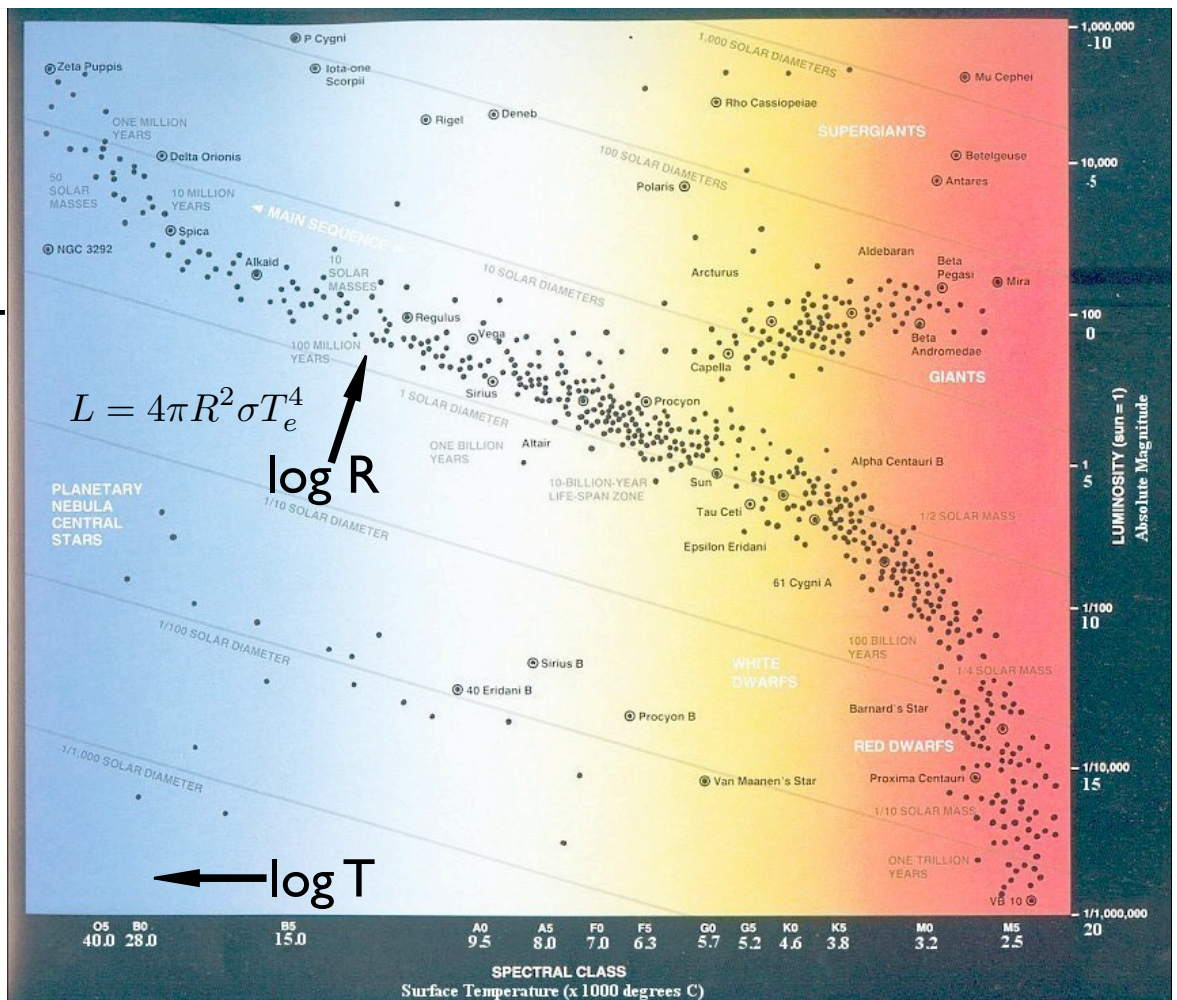


log L

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

log R

log T



luminosità di Eddington

la radiazione stellare esercita una pressione sugli elettroni del plasma

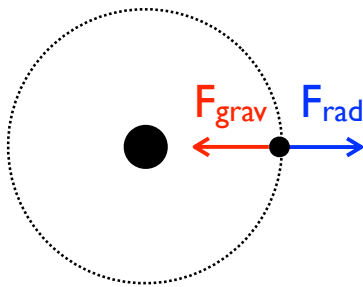
infatti l'onda e.m. trasporta energia e quantità di moto:

$$|d\mathbf{p}| = \frac{1}{c} d\mathcal{E}$$

flusso: $F = \frac{d\mathcal{E}}{dA dt}$

pressione di radiazione: $p_{rad} = \frac{|d\mathbf{p}|}{dA dt} = \frac{F}{c}$

per una sorgente astrofisica isotropa: $p_{rad} = \frac{F}{c} = \frac{L}{4\pi R^2 c}$



la forza della pressione di radiazione non può superare l'attrazione gravitazionale, altrimenti il sistema si disgrega

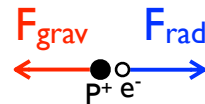
$$p_{rad} \sigma_T = \frac{L \sigma_T}{4\pi R^2 c} \leq \frac{GMm_p}{R^2}$$

limite indipendente da R

luminosità di Eddington

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

nota: la sez d'urto Thomson è maggiore per gli elettroni, la forza gravitazionale è maggiore per i protoni, i due sono legati dal campo elettrico



$$L \leq L_{Edd} = \frac{4\pi G m_p c}{\sigma_T} M = 1.3 \cdot 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ erg/s}$$

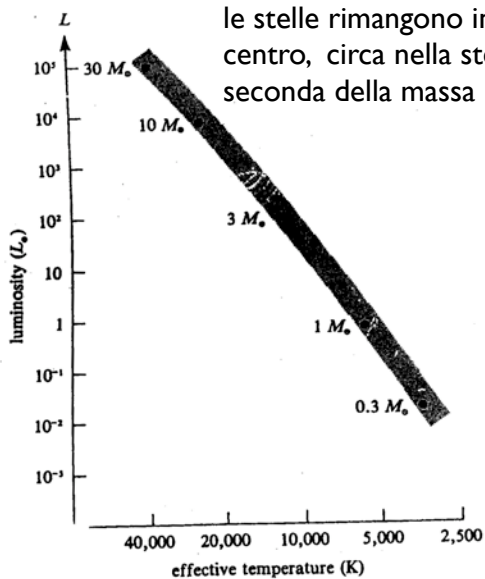
per il Sole: $L \sim 3 \cdot 10^{-5} L_{Edd}$

per le stelle note: $L < L_{Edd}$

lo stesso limite si applica ad ogni sorgente stabile ed isotropa

ad esempio, per i Quasar: $L_{Edd} = 1.3 \cdot 10^{46} M_8 \text{ erg/s}$

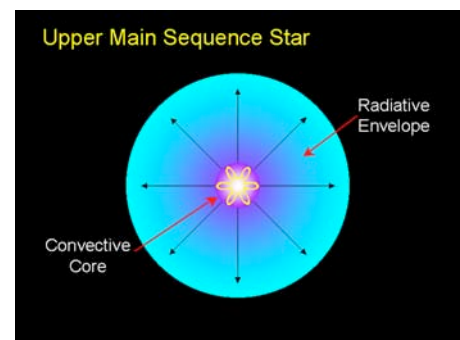
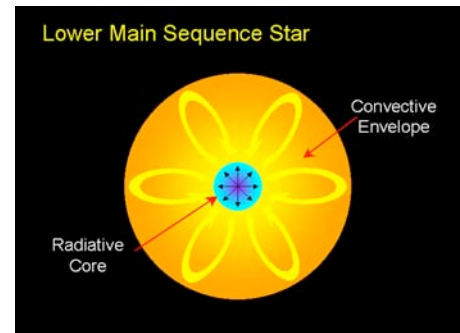
evoluzione in sequenza principale



le stelle rimangono in sequenza principale finché bruciano idrogeno nel centro, circa nella stessa posizione per un tempo più o meno lungo, a seconda della massa

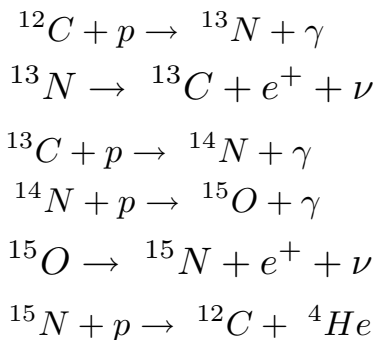
$$\tau_* = \frac{\eta_* c^2 M}{L} \propto \frac{M}{L} \propto M^{-4} - M^{-2}$$

nelle stelle di piccola massa, fino a circa 1.5 masse solari, la produzione di energia nucleare avviene attraverso la catena p-p. questo favorisce condizioni in cui nel nucleo della stella il trasporto dell'energia è radiativo mentre l'inviluppo è convettivo

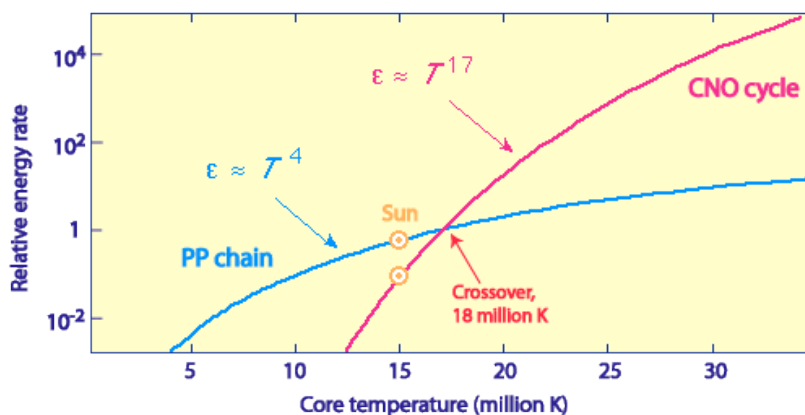
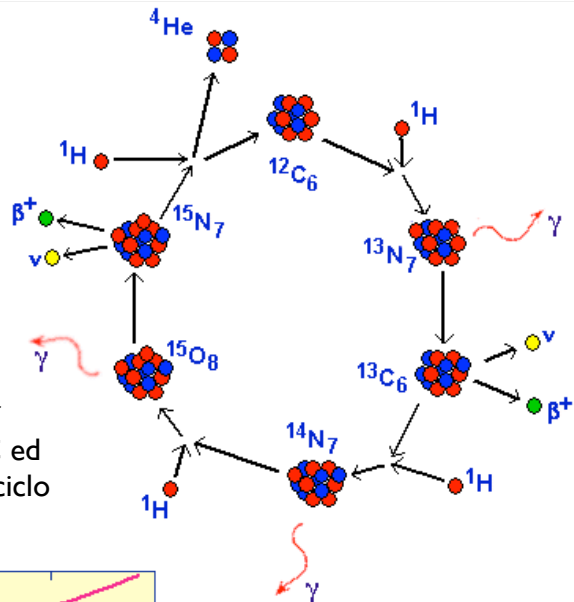


viceversa, nelle stelle di massa maggiore di 1.5 masse solari le reazioni nucleari dominanti sono quelle del ciclo CNO. il nucleo risulta allora convettivo e l'inviluppo radiativo

ciclo CNO



anche il ciclo CNO - come la catena p-p - trasforma 4p in ${}^4\text{He}$. è possibile solo se è già presente del ${}^{12}\text{C}$ ed il ritmo dipende da T più fortemente che per p-p. il ciclo CNO prevale al di sopra di ~1.5 masse solari

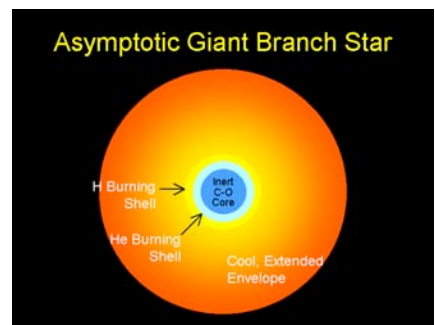
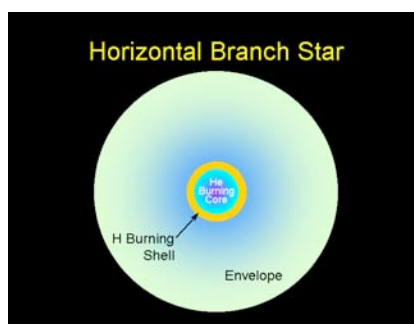
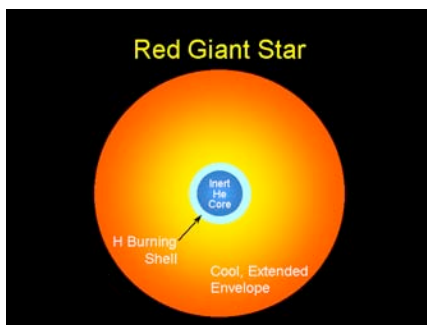
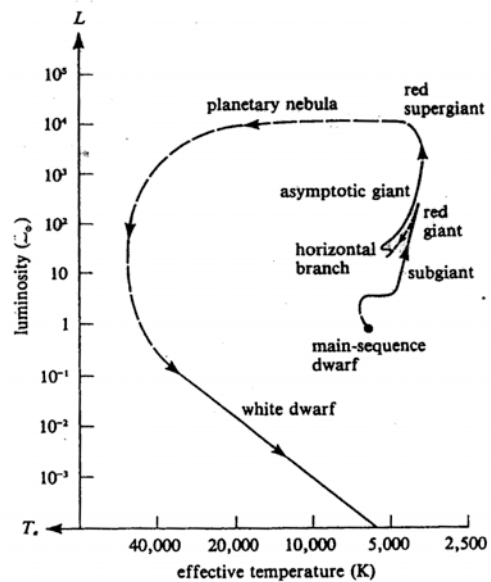


evoluzione post sequenza

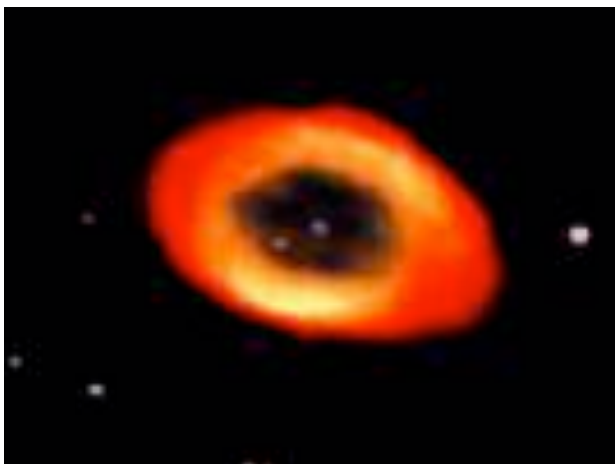
quando la stella esaurisce l'idrogeno nel nucleo l'evoluzione accelera, si hanno forti variazioni di T_c e si passa attraverso fasi evolutive violente. la luminosità aumenta fortemente non è più verificata la condizione $t_{KH} \ll t^*$

stelle di piccola massa:

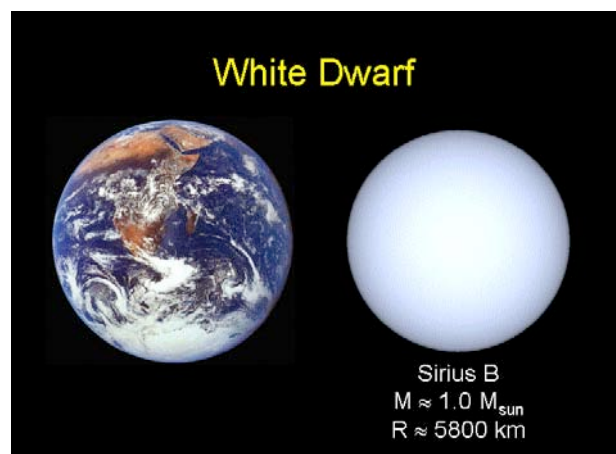
passano per una fase di supergigante rossa in cui gli strati esterni sono meno legati, a causa della piccola accelerazione di gravità, così in parte vengono espulsi nella fase di nebulosa planetaria. resta un nucleo, caldo e degenere, di carbonio e ossigeno, che va a formare una nana bianca.



nebulosa planetaria ad anello NGC 6720



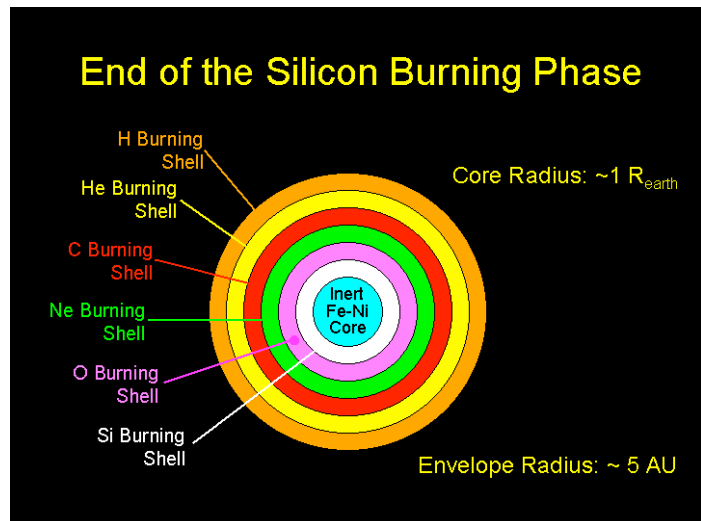
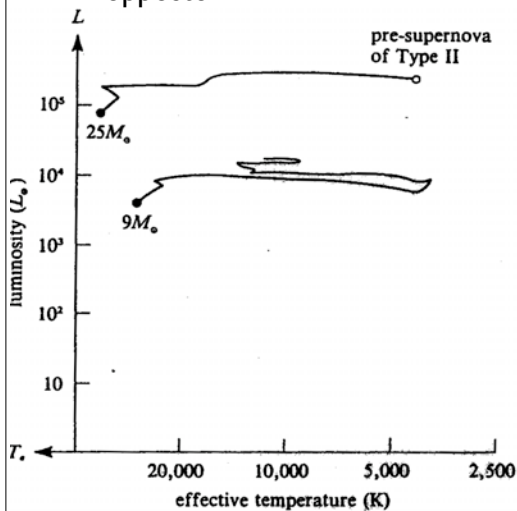
una nana bianca ha dimensioni paragonabili alla Terra e densità $\sim 10^6 \text{ g/cm}^3$



stelle di grande massa: $> \sim 8 M_{\text{solari}}$

la stella brucia carbonio, poi neon, poi ossigeno, poi silicio. si forma una struttura a strati (o a cipolla) con un nucleo finale di ferro

la traccia nel diagramma HR è circa orizzontale a zig-zag, alternando espansioni del nucleo e contrazioni dell'involuppo con fasi in cui avviene l'opposto



il nucleo di ferro non può più generare elementi più pesanti (non conviene), perciò si accumula e, quando supera circa 1.4 masse solari (massa limite di Chandrasekhar) collassa e la stella esplode come una supernova.

al centro si forma una stella di neutroni, oppure un black hole se la massa del nucleo supera ~ 3 masse solari

esplosione di una supernova nella galassia M51, 19 luglio 2005

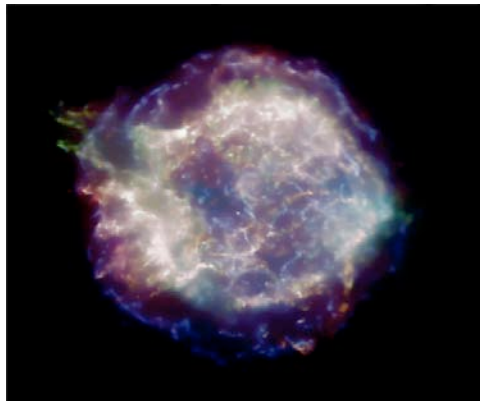
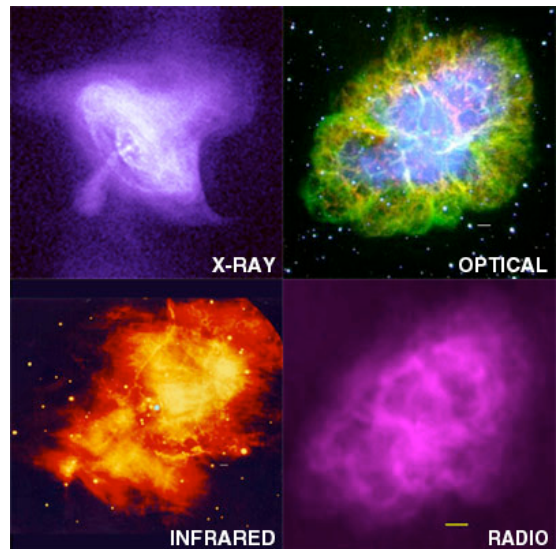
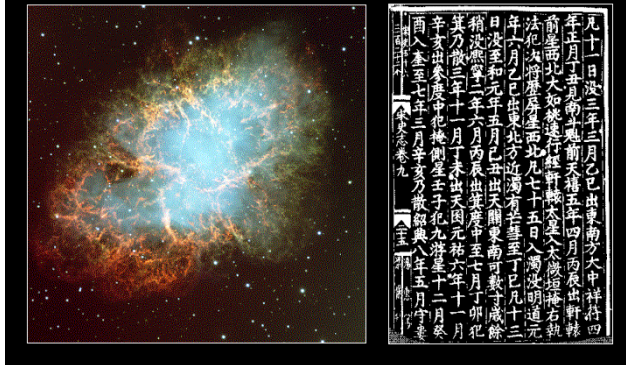


le esplosioni di supernova immettono nel mezzo interstellare una gran quantità di elementi pesanti prodotti nelle reazioni nucleari. le stelle che si formano in seguito dal materiale arricchito sono così ricche di elementi pesanti (metalli)

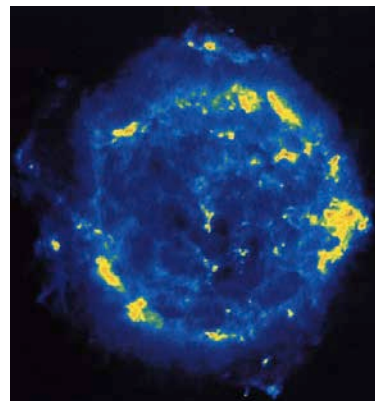
resti di supernova: crab nebula

Crab Nebula

Remnant of Supernova in 1054 AD

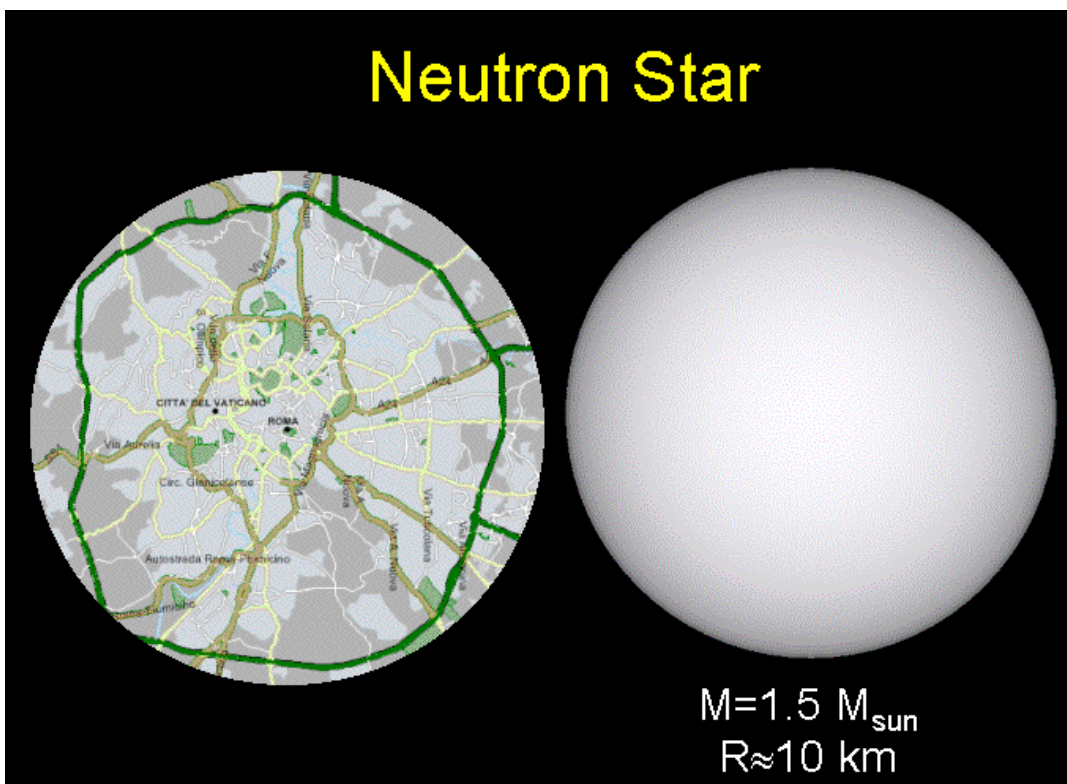


Cas A
in raggi X
e in radio



il nucleo collassa e forma una stella di neutroni

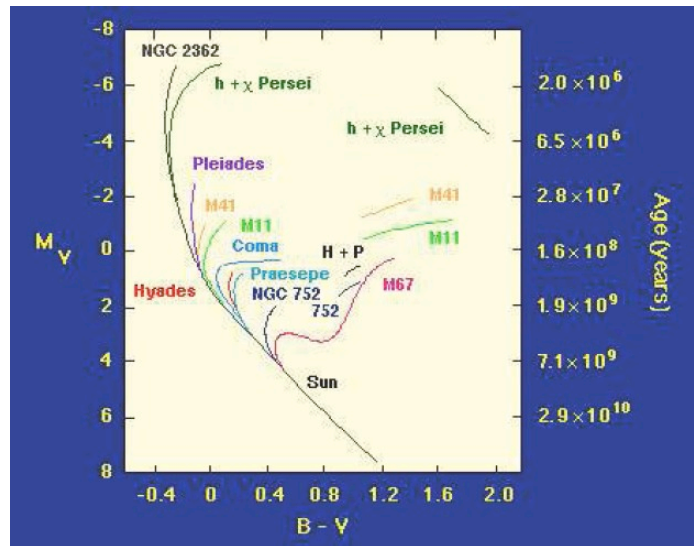
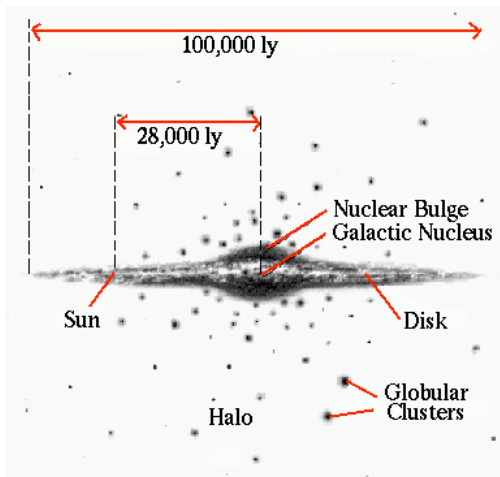
Neutron Star



$M = 1.5 M_{\text{sun}}$
 $R \approx 10 \text{ km}$

popolazioni stellari

diagrammi HR di alcuni ammassi stellari: le stelle componenti hanno la stessa età e diverse masse, le stelle di grande massa hanno esaurito l'idrogeno e si sono allontanate dalla sequenza principale. dalla posizione del punto di svolta è possibile determinare l'età dell'ammasso.



si vede allora che gli ammassi globulari sono vecchi e fanno parte della cosiddetta popolazione II, che è distribuita nell'alone galattico. le stelle del disco e gli ammassi aperti costituiscono la popolazione I, giovane

la popolazione II ha composizione chimica primordiale, la popolazione I è arricchita in elementi pesanti perché formata da gas che contiene gli elementi prodotti nelle supernovae