

Cap. 5

legge di Hubble e redshift

A RELATION BETWEEN DISTANCE AND RADIAL VELOCITY AMONG EXTRA-GALACTIC NEBULAE

BY EDWIN HUBBLE

MOUNT WILSON OBSERVATORY, CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON

Communicated January 17, 1929

Hubble, 1929: $v_r = H_0 d$

le misure di Hubble indicavano $H_0 \sim 500$ km/s/Mpc ma c'era un errore sulla misura delle distanze e successivamente il valore della costante di Hubble H_0 fu riportato fra 50 e 100 km/s/Mpc. Le determinazioni recenti, basate su distanze calibrate attraverso le supernovae in galassie lontane, danno valori fra 70 e 75 km/s/Mpc.

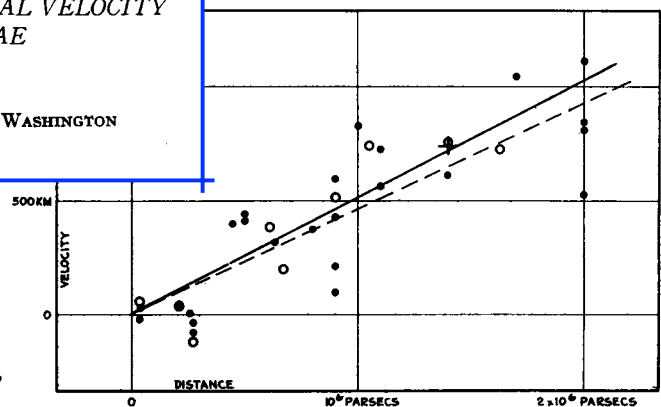


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

le misure di velocità radiale sono ottenute da osservazioni spettroscopiche, che indicano uno spostamento della radiazione elettromagnetica verso il rosso (redshift), interpretabile in prima approssimazione come un effetto Doppler:

$$\lambda_o = \lambda_e \left(1 + \frac{v_r}{c} \right) = \lambda_e (1 + z)$$



at rest



moving away from you: redshift

$$\text{redshift: } z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

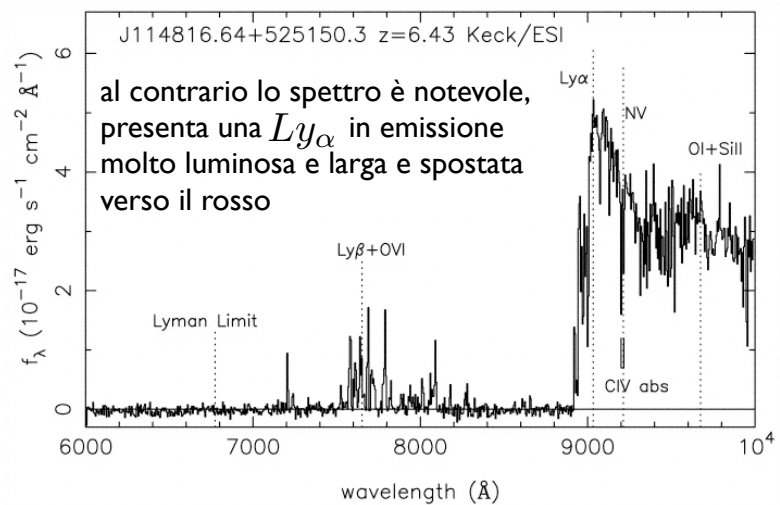
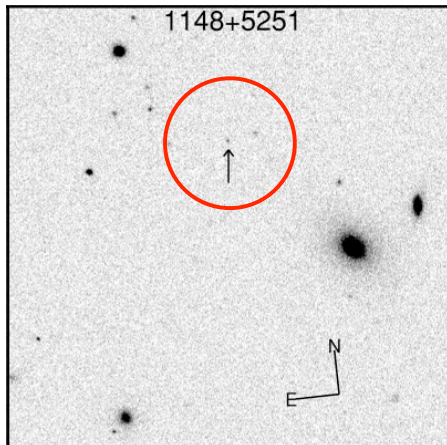
lunghezza d'onda emessa
(intrinseca)

lunghezza d'onda osservata

quasar di alto redshift

Molti quasar di alto redshift sono stati scoperti dalla SDSS (Sloan Digital Sky Survey, www.sdss.org), una mappatura sistematica ed automatizzata di oltre 200 milioni di sorgenti cosmiche, fra cui 120.000 quasar. La SDSS è particolarmente efficiente nella rivelazione di quasar di alto redshift. Il record è il quasar J1148+5251 con $z=6.43$

L'immagine del quasar non è particolarmente appariscente, un puntino con flusso osservato $F \sim 5 \cdot 10^{-13} \text{ erg/cm}^2/\text{s}$



$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1$$

$$\lambda_o = \lambda_e(1 + z) = 1216 \times 7.43 = 9035 \text{ \AA}$$

redshift cosmologico

che cosa determina questo redshift così grande? abbiamo introdotto la legge di Hubble interpretando lo spostamento verso il rosso come un effetto Doppler: questa interpretazione è valida anche per redshift così alti?

$$v_r = H_o d, \quad z = \frac{v_r}{c} \gg 1 \text{ !?}$$

NO: $z \neq \frac{v_r}{c} \rightarrow z$ cosmologico dipende dall'evoluzione del fattore di scala dell'Universo $R(t)$

inoltre in cosmologia dovremo sostituire la distanza d con la distanza di luminosità $D_L(z)$

per z molto alto ci aspettiamo luminosità molto grandi

relazioni fra flusso e luminosità:
$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2(z)} \quad L = 4\pi D_L^2(z) F$$

$D_L(z)$ dipende dal particolare modello di Universo considerato, che quantifica e descrive

l'espansione attraverso il fattore di scala $R(t)$. Ne ripareremo, intanto prendiamo un modello semplice e molto usato, il Modello di Einstein-deSitter (che descriveremo in dettaglio in seguito), per il quale la distanza di luminosità vale:

$$D_L = \frac{c}{H_o} 2 \left[(1 + z) - \sqrt{1 + z} \right]$$

con $H_o = 75 \text{ km/s/Mpc}$ si trova $D_L = 9.3 \times 4000 \text{ Mpc}$

$$L \lesssim 10^{47} \text{ erg/s} \approx 2 \cdot 10^{13} L_\odot$$

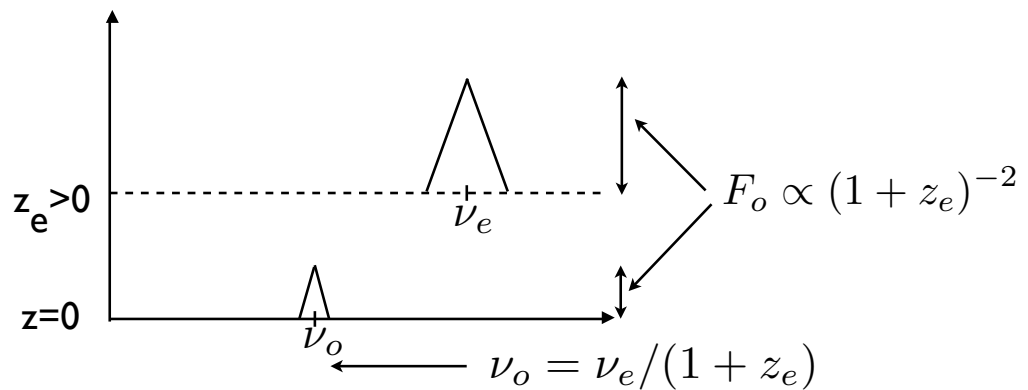
una luminosità molto maggiore di quella emessa dall'insieme delle stelle di una galassia

redshift e spettri

l'espansione di Hubble cui è sottoposto l'Universo provoca uno "stiramento" in lunghezza d'onda dello spettro di tutte le sorgenti $\lambda_o = \lambda_e(1 + z_e)$

viceversa, le frequenze $\nu_o = \nu_e/(1 + z_e)$

esempio: righe di emissione



le frequenze centrali e le larghezze delle righe vengono parimenti diminuite, il flusso varia con un fattore quadratico

$$\Delta\nu_o = \Delta\nu_e/(1 + z_e)$$

redshift e spettri

esempio: corpo nero

tutte le frequenze si abbassano del fattore $(1+z)$:

$$\nu_o = \nu_e/(1 + z)$$

sostituendo nello spettro, si ritrova ancora un corpo nero:

$$I_{\nu_e} \propto \frac{\nu_e^3}{e^{h\nu_e/kT_e} - 1} = \frac{\nu_o^3(1+z)^3}{e^{h\nu_o(1+z)/kT_e} - 1} = \frac{\nu_o^3}{e^{h\nu_o/kT_o} - 1} (1+z)^3$$

diviso per $(1+z)^3$: $I_{\nu_o} = I_{\nu_e}/(1+z)^3$

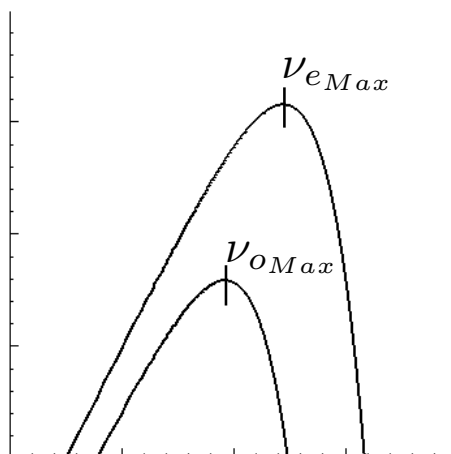
ad una temperatura minore: $T_o = T_e/(1+z)$

e con un massimo a frequenza corrispondentemente minore:

$$\nu_{oMax} = \nu_{eMax}/(1+z)$$

ricordando che per un corpo nero vale la relazione:

$$h\nu_{Max} \simeq 2.8 kT$$



redshift e lunghezze

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad 1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e}$$

le lunghezze d'onda si espandono
come tutte le altre lunghezze

$$D \propto R(t)$$

$$\lambda \propto R(t)$$

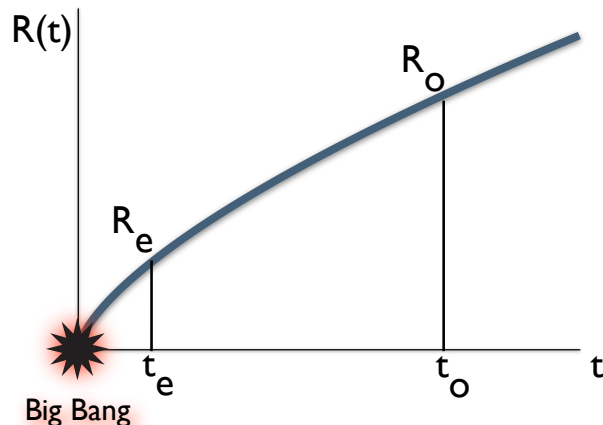
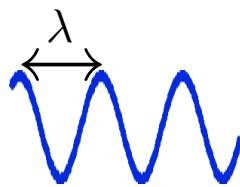
ovvero $\nu \propto R(t)^{-1}$

questo è intuitivo (ma c'è un teorema)

per il nostro quasar con $z=6.43$:

$$R_e = \frac{R_o}{1+z} = \frac{R_o}{7.43}$$

R_e era piccolo !



$R(t)$ cresce (espansione di Hubble)

λ cresce: $\lambda_e \rightarrow \lambda_o$

ampiezza decresce: $F = L/4\pi D_L(z)^2$

redshift come effetto Doppler ?

$$\begin{cases} \lambda \propto R(t) \\ D \propto R(t) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad D = aR$$

$$\dot{D} = v_r = a\dot{R} = D \frac{\dot{R}}{R} \rightarrow \text{legge di Hubble} \quad v_r = \frac{\dot{R}_o}{R_o} D = H_o D$$

Hubble interpretò il redshift z come effetto Doppler,
il che è una approssimazione valida per $z \ll 1$

qui stiamo trascurando
i termini di secondo
ordine in Δt

$$\Delta\lambda \propto \Delta R \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta R}{R} \simeq \frac{\dot{R}\Delta t}{R} = \frac{v_r}{D} \Delta t = \frac{v_r}{D} \frac{D}{c} = \frac{v_r}{c}$$

intervallo di tempo cosmico fra
l'emissione e l'osservazione, in
cui la luce percorre la distanza D

cf. effetto Doppler (non relativistico) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$

$$\Rightarrow z \simeq \frac{v_r}{c} \quad (\text{Doppler}) \text{ per } z \ll 1$$

in relatività ristretta l'effetto Doppler è modificato dalla dilatazione dei
tempi, ed è presente anche quando $v_r=0$ (effetto Doppler trasversale)

$$\nu_o = \frac{\nu_e}{\gamma(1 + v_r/c)} \quad , \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \gamma(1 + \frac{v_r}{c}) - 1$$

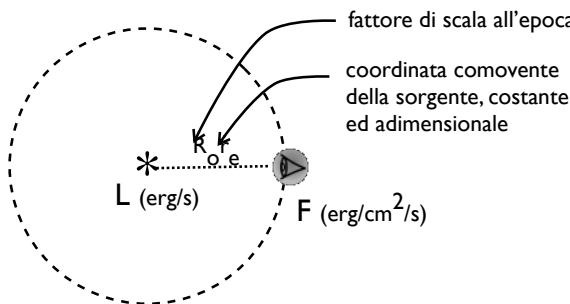
distanza di luminosità

da $\begin{cases} z \simeq \frac{v_r}{c} \\ v_r \simeq H_o D \end{cases} \Rightarrow D \simeq \left(\frac{c}{H_o} \right) z$ per $z \ll 1$

← scala di distanza dell'Universo $R_H \sim 4000$ Mpc

in questa approssimazione si vede direttamente che z misura la distanza $D \propto z$
p.es. una sorgente a $z=0.1$ dista 400 Mpc

in generale, $D_L(z) \equiv \frac{c}{H_o} f(z)$, con $f(z) \simeq z$ per $z \ll 1$



$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2(z)} = \frac{L}{4\pi (R_o r_e)^2 (1+z)^2}$$

energia dei fotoni $h\nu \propto (1+z)^{-1}$
ritmo di arrivo dei fotoni $\propto (1+z)^{-1}$

il calcolo di $D_L(z)$ per $z > \sim 1$ richiede modelli cosmologici $\rightarrow R(t), r_e(z) \rightarrow R(z)$

modelli di FRW

sono i modelli cosmologici per un Universo omogeneo e isotropo

FRW $\left\{ \begin{array}{l} \text{Robertson-Walker: metrica spaziale} \\ \text{Friedmann: modello dinamico} \end{array} \right.$

analogo newtoniano:

sfera autogravitante in espansione $\left\{ \begin{array}{l} E > 0 \text{ sistema legato} \\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ caso "critico"} \leftrightarrow \text{geometria Euclidea "piatta"} \\ E < 0 \text{ sistema legato} \end{array} \right.$

$$\mathcal{T} + \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = 0$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3}$$

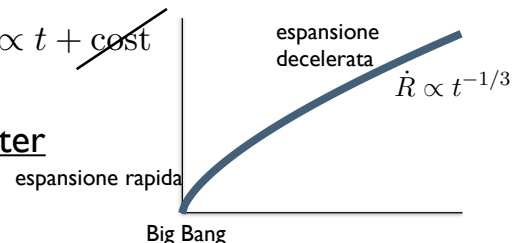
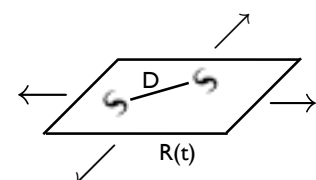
tempo dinamico: $H^{-1}(t) = t_H = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho(t)}}$

$$\dot{R}^2 \propto R^{-1}, \quad \dot{R} \propto R^{-1/2}, \quad R^{1/2} dR \propto dt, \quad R^{3/2} \propto t + \text{cost}$$

$$\Rightarrow R = R_o \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3}$$

modello di Einstein-deSitter

vale se densità=critica $\rho \simeq 10^{-29} \text{ g/cm}^3$



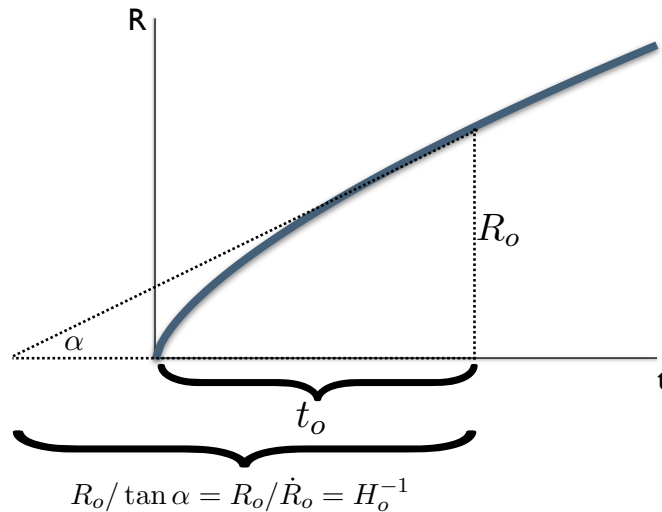
età dell'Universo nel modello di Einstein-deSitter

$$R = R_o \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3}$$

$$\dot{R} = \frac{R_o}{t_o} \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_o} \right)^{-1/3}$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{2}{3t}$$

$$t_o = \frac{2}{3} H_o^{-1}$$

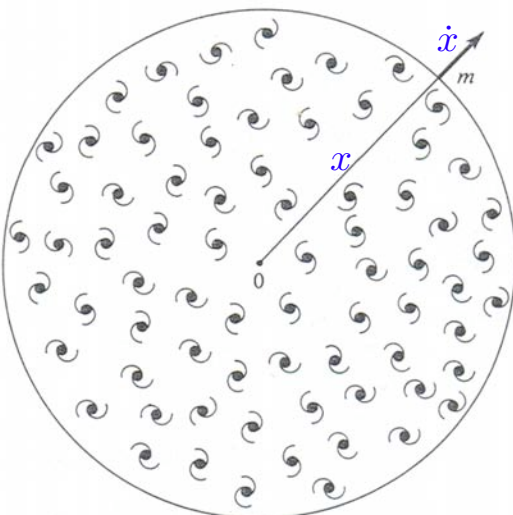


modelli di Friedmann

simmetria massimale: * universo omogeneo e isotropo $\rightarrow$ RW (relatività generale)

* proprietà derivate “in piccolo” valide anche “in grande”

è possibile anche derivare i modelli di Friedmann con un approccio quasi-Newtoniano



considero una sfera piccola, con raggio $x \ll R$
 le galassie, elementi di massa m , si muovono seguendo
 l'espansione di Hubble e la gravità interna alla loro
 posizione

$$x(t) = x_o \frac{R(t)}{R_o}$$

la distribuzione di massa esterna, se isotropa, non ha
 effetto, infatti:

1) meccanica Newtoniana: teorema di Gauss $\rightarrow$
 campo generato da materia esterna $= 0$

2) relatività generale: Teorema di Birkhoff $\rightarrow$
 metrica piatta entro una cavità sferica



modelli di Friedmann

dinamica “in piccolo”: Newtoniana $\mathcal{T}(t) + \mathcal{U}(t) = \mathcal{E}$

m: galassia; M: massa interna al raggio $x(t)$

energia potenziale: $\mathcal{U}(t) = -\frac{GmM[x(t)]}{x(t)} = -\frac{Gm}{x(t)} \frac{4\pi}{3} \rho(t) [x(t)]^3 = -\frac{4\pi}{3} Gm\rho(t)x_o^2 \left[\frac{R(t)^2}{R_o^2} \right]$

energia cinetica: $\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m x_o^2 \frac{\dot{R}^2}{R_o^2}$

$$\mathcal{E} = \mathcal{T}(t) + \mathcal{U}(t) = \frac{1}{2} m \frac{x_o^2}{R_o^2} \left[\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) R(t)^2 \right]$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} R^2 + \frac{2\mathcal{E}}{m} \frac{R_o^2}{x_o^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} R^2 - kc^2 \quad k = 0, \pm 1$$

con eventuale ridefinizione di x_o/R_o

equazioni di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho}{3}$$

modelli di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho}{3}$$

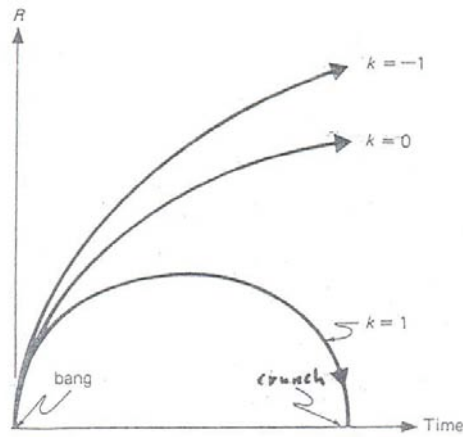
notare che il raggio della sfera non entra nelle equazioni, come predetto dalla omogeneità

solo si richiede che x_o sia così piccolo da poter applicare l'approssimazione Newtoniana della GR

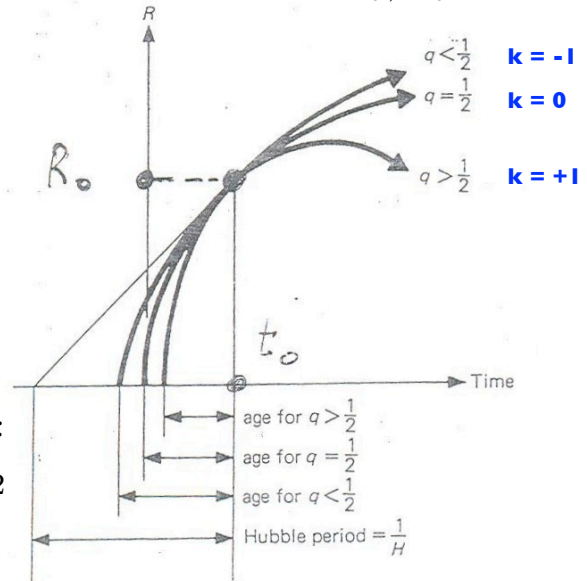
$$\frac{GM_{int}}{x_o} = G \frac{4\pi}{3} \rho x_o^2 \ll c^2 \quad x_o \ll \sqrt{\frac{3c^2}{4\pi G \rho}} \simeq ct_H \sim R_H$$

comportamento temporale		comportamento spaziale	
legato $E < 0$	ricollasso	chiuso	$k = +1$ curvatura positiva
critico $E = 0$ (Einstein-deSitter)	espansione continua $R \sim t^{2/3}$	piatto	$k = 0$ curvatura nulla
slegato $E > 0$	espansione continua	aperto	$k = -1$ curvatura negativa

modelli di Friedmann



situazione rispetto all'epoca di osservazione (a parità di $R_o, \dot{R}_o$)

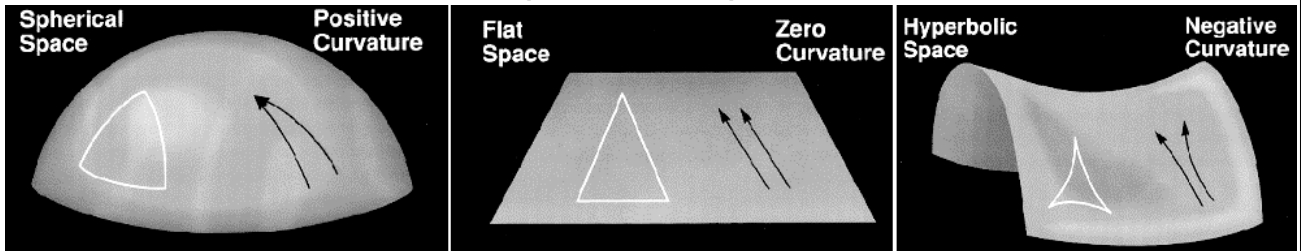


tutti i modelli tendono a EdS per $z \gg 1$ ($t \rightarrow 0$) infatti:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}R^2 - kc^2 = \frac{2GM}{R} - kc^2$$

domina per z grandi

curvatura spaziale: esempi 2D



densità critica

dalle equazioni di Friedmann
$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

calcolate per $t=t_o$
$$H_o^2 + \frac{kc^2}{R_o^2} = \frac{8\pi G\rho_o}{3}$$

si ottiene:
$$\frac{kc^2}{R_o^2} = \frac{8\pi G\rho_o}{3} - H_o^2 = H_o^2 \left(\frac{\rho_o}{\rho_c} - 1 \right)$$

avendo definito
$$\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29} \left(\frac{H_o}{75} \right)^2 \text{ g/cm}^3$$

$\Omega_o = \rho_o / \rho_c$ viene chiamato parametro di densità

costante cosmologica

la Relatività Generale (GR)
prevede anche un termine di
costante cosmologica nelle
equazioni di Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

si può anche
riscrivere così

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda)$$

definendo $\rho_\Lambda = \Lambda c^2 / 8\pi G$ (energia oscura o energia del vuoto)

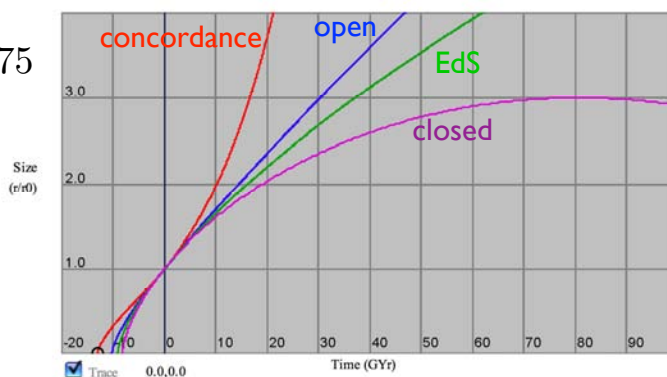
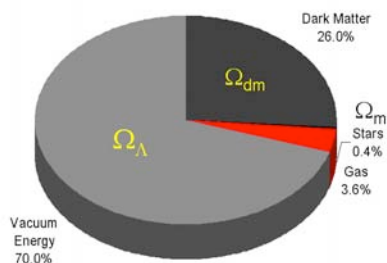
la costante cosmologica dà luogo ad una moltitudine di modelli (2 parametri).

oggi le luminosità delle supernovae in galassie distanti indicano un modello accelerato, $\ddot{R} > 0$

Concordance Model:

$$\Omega_M = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7, H_0 = 75$$

Matter & Energy Content of the Universe



metrica

Ricordiamo che uno spazio omogeneo, isotropo, piatto (Euclideo) è descritto dalla metrica di Minkowski della Relatività Speciale (SR). In coordinate polari “comoventi” (che seguono l’espansione di Hubble):

intervallo fra 2 eventi

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

r coordinata radiale adimensionale
 $R(t)$ descrive l’espansione di Hubble

$$R^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

(metrica di RW per $k=0$)

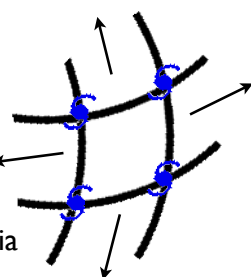
metrica di RW generale:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

* invariante per traslazioni e rotazioni

* parte spaziale ortogonale a t

visualizzando punti con
galassie che seguono il
flusso di Hubble, le
coordinate comoventi
sono “timbri” che
seguono ciascuna galassia
nel suo moto



come in SR:

$$ds^2 = 0 \quad c=dl/dt \text{ descrive propagazione di fotoni}$$

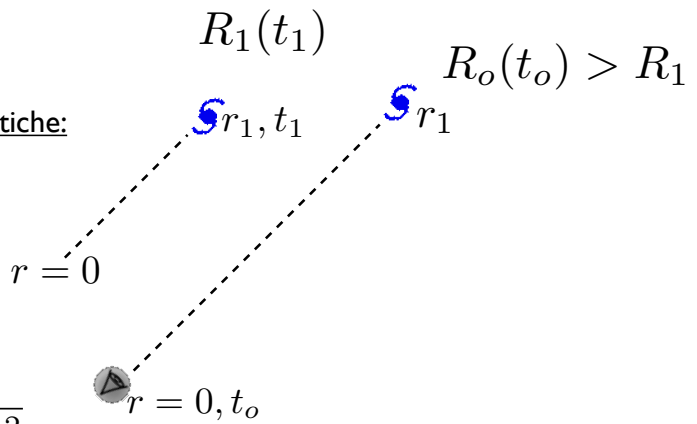
$$ds^2 > 0 \quad \text{separazione temporale di 2 eventi} \\ dl=0 : \text{tempo proprio}$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{separazione spaziale di 2 eventi} \\ dt=0 : \text{distanza propria}$$

teorema del redshift

propagazione di onde elettromagnetiche:

osservo in $r = 0$
 verso $\theta, \phi = 0$ (direzione radiale)
 a $t = t_o$



RW

$$\Rightarrow 0 = ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

$$c \frac{dt}{R(t)} = - \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (\text{r diminuisce al crescere di t lungo il cammino dell'onda})$$

considero 2 creste successive dell'onda e.m., la prima parte a t_1 e arriva a t_o dato da

$$c \int_{t_1}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv F(r_1)$$

la seconda parte a $t_1 + \delta t_1$ e arriva a $t_o + \delta t_o$ dato da

$$c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv F(r_1)$$

teorema del redshift

uguagliando:

$$\cancel{c \int_{t_1}^{t_o} \dots} = c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_o + \delta t_o} \dots = c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} \dots + \cancel{c \int_{t_1}^{t_o} \dots} + c \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \dots$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{R(t)}$$

poiché $\delta t_1, \delta t_o \ll R/\dot{R}$ $10^{-8} - 10^{-15} \text{ s}$ cf. $10^{10} \times 3 \cdot 10^7 \text{ s}$

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)} \simeq \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t_1)(1 + \cancel{\frac{\dot{R}_1}{R_1} \delta t})} \simeq \frac{\delta t_1}{R(t_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_o}{R(t_o)}$$

teorema del redshift

$$\Rightarrow \frac{\delta t_1}{\delta t_o} = \frac{R(t_1)}{R(t_o)} = \frac{\nu_o}{\nu_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_o}$$

$$\lambda \propto R(t)$$

redshift effetto di espansione !

Definizione: $z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_1}{\lambda_1} > 0$

$$\lambda_1 = \lambda \quad \text{rest-frame (intrinseca)}$$

$$\lambda_o = \lambda \quad \text{osservata}$$

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_1} = \frac{R(t_o)}{R(t_1)}$$

informazione diretta sul rapporto delle scale a t_1 e t_o

distanza di luminosità $D_L(z)$

ricordiamo: $F = \frac{L}{4\pi D_L^2(z)} = \frac{L}{4\pi (R_o r_1)^2} \frac{1}{(1+z)^2}$ (1+z) energia dei fotoni
(1+z) ritmo dei fotoni

ci occorre r_1

$$c \int_{t_1}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \arcsin(r_1) & (k=1) \\ r_1 & (k=0) \\ \text{settsinh}(r_1) & (k=-1) \end{cases} \equiv F(r_1)$$

caso k=0 (EdS):

$$r_1 = c \int_{t_1}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} \quad \leftarrow R = R_o (t/t_o)^{2/3}, \text{ con } t_o = \frac{2}{3} H_o^{-1}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{ct_o}{R_o} 3 \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_o} \right)^{1/3} \right]$$

ma: $\frac{t_1}{t_o} = \left(\frac{R_1}{R_o} \right)^{3/2} = (1+z)^{-3/2} \quad (\text{dal Teorema del redshift})$

distanza di luminosità

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2c}{R_o H_o} \left[1 - (1+z)^{-1/2} \right]$$

$$R_o r_1 = \frac{2c}{H_o} \left[1 - (1+z)^{-1/2} \right]$$

quindi:

$$D_L = R_o r_1 (1+z) = \frac{c}{H_o} 2 \left[1 + z - \sqrt{1+z} \right]$$

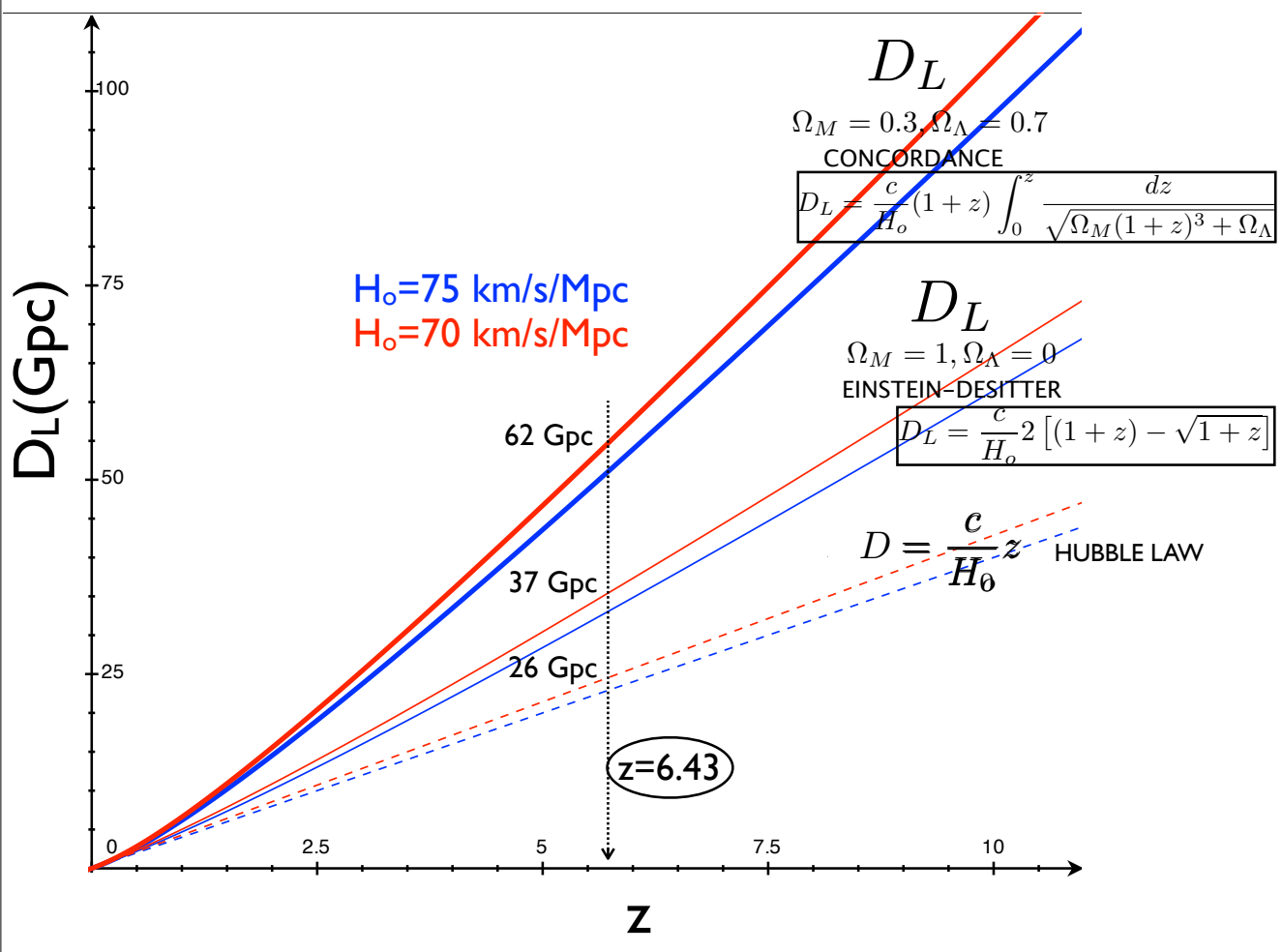
questo per $k=0$, per $k=+1$ o -1 $R(t)$ è poco più complicato, e così anche D_L , ma concettualmente è lo stesso.

comunque per z piccoli tutti i modelli FRW tendono a EdS, ed anche i modelli piatti con moderata costante cosmologica, oggi preferiti dai dati (Concordance Model)

per il quasar con redshift 6.43, utilizzando

EdS con $H_o=75$, la distanza di luminosità è: $D_L = 9.3 \times 4000 \text{ Mpc} \simeq 37 \text{ Gpc}$

con il più realistico Concordance Model è ancora più grande: 62 Gpc



distanze

nota:

la distanza di luminosità non è la distanza geometrica, è invece una distanza “efficace” che entra nelle formule riguardanti la luminosità e tiene conto dell'espansione cosmologica

esistono altre distanze definite appositamente per altre relazioni, p.es. distanza di diametro angolare, anche queste tengono (diversamente) conto dell'espansione cosmologica

la distanza geometrica è la distanza propria, si ottiene ponendo $dt=0$ nella metrica di RW ed integrando, in direzione radiale la distanza propria, ad un dato tempo, è:

$$D_P(t) = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

si chiama distanza comovente radiale la distanza propria calcolata al tempo attuale:

$$D_C = R_o \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

all'epoca attuale, e per uno spazio piatto (EdS), la distanza propria e la distanza comovente radiale sono entrambe:

$$D_P(t_o) = D_C = R_o r$$

look-back time

è interessante anche una formula per calcolare il tempo trascorso per il tragitto dei fotoni dalla sorgente a noi, ovvero l'intervallo di tempo cosmico che ci separa dalla sorgente

$$\begin{aligned} \text{EdS: } R &= R_o \left(\frac{t}{t_o} \right)^{2/3} \\ \frac{t}{t_o} &= \left(\frac{R}{R_o} \right)^{3/2} = (1+z)^{-3/2} \\ t_o - t &= t_o [1 - (1+z)^{-3/2}] \\ \Delta t &= \frac{2}{3} H_o^{-1} [1 - (1+z)^{-3/2}] \end{aligned}$$

per $z=6.43$, con $H_o=75$, si ha:

$$H_o^{-1} \sim 13 \text{ Gyr}$$

$$t_o = \frac{2}{3} H_o^{-1} \sim 8.7 \text{ Gyr}$$

$$\Delta t \sim 8.3 \text{ Gyr} \sim 0.95 t_o$$

poco! e anche t_o è troppo piccolo
infatti si ha evidenza di ammassi globulari vecchi circa 12 miliardi di anni

prima si rimediava tentando di abbassare H_o e Ω_o (per questi modelli $t_o < H_o^{-1}$)
oggi ci si affida a Λ (per questi modelli può essere anche $t_o > H_o^{-1}$)

per il modello di concordanza $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $H_o = 71$

si ottiene $t_o \sim 13.3 \text{ Gyr}$ e per $z=6.43$: $\Delta t \sim 12.5 \text{ Gyr}$

rimane comunque il problema di un tempo molto breve ($\sim 1 \text{ Gyr}$) per la nascita delle prime strutture