

Soluzione del Compito d'esame del 5 febbraio 2008

1) I due condensatori C_1 e C_2 sono in serie, nella configurazione iniziale $C_{eq}^{in} = C_1^{in} C_2 / (C_1^{in} + C_2) = 7.5 \text{ nF}$ di conseguenza $V_{AB}^{in} = V_0 C_{eq}^{in} / C_1^{in} = 225 \text{ V}$. Una volta inserito il dielettrico il condensatore C_1 vale:

$$C_1^{fin} = \frac{d^2 \epsilon_0 \kappa}{h/2(1+\kappa)} = \frac{d^2 \epsilon_0}{h} \frac{2\kappa}{\kappa+1} = C_1^{in} \frac{2\kappa}{\kappa+1} = 16 \text{ nF}. \quad (1)$$

e $C_{eq}^{fin} = C_1^{fin} C_2 / (C_1^{fin} + C_2) = 10.4 \text{ nF}$ e quindi $V_{AB}^{fin} = V_0 C_{eq}^{fin} / C_1^{fin} = 195.7 \text{ V}$

2) Abbiamo appena visto che la tensione ai capi del condensatore C_1 cambia, vediamo cosa succede alla carica: $q_1^{in} = C_1^{in} V_{AB}^{in} = 2.25 \text{ } \mu\text{C}$ mentre $q_1^{fin} = C_1^{fin} V_{AB}^{fin} = 3.13 \text{ } \mu\text{C}$. Ne consegue che l'introduzione del dielettrico in C_1 avviene nè a potenziale costante nè a tensione costante. In ogni caso rimane costante il potenziale V_0 ai capi di C_{eq} .

3) Il caso (a) è stato descritto nella prima domanda. Nel caso (b) vale:

$$C_1^{fin} = \frac{d^2 \epsilon_0}{2h} + \frac{d^2 \epsilon_0 \kappa}{2d} = \frac{C_1^{in}}{2} (1 + \kappa) = 25 \text{ nF} \quad (2)$$

e $C_{eq} = 13.6 \text{ nF}$ e quindi $V_{AB}^{fin} = 163.6 \text{ V}$. In definitiva la tensione ai capi di C_1 è maggiore nel caso (a).

4) Il condensatore $C_1(x)$, in cui il dielettrico è stato inserito di una quantità x , è dato dalla seguente espressione:

$$C_1(x) = \frac{\epsilon_0 d(d-x)}{h} + \frac{\epsilon_0 dx}{h} \frac{2\kappa}{1+\kappa} = C_1^{in} \left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{x}{d} \right] = C_1^{in} \left[1 + \frac{3x}{5d} \right] \quad (3)$$

ed è serie con il condensatore $C_2 = 3\epsilon_0 d^2/h = 3C_1^{in}$, e quindi:

$$C^{eq}(x) = 3C_1^{in} \frac{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{x}{d}}{4 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{x}{d}} = C_1^{in} \frac{15d + 9x}{20d + 3x}. \quad (4)$$

L'energia elettrostatica in funzione di x si scrive come $W(x) = 1/2 C^{eq}(x) V_0^2$, una variazione positiva dx corrisponde ad un aumento di energia $dW = 1/2 V_0^2 dC^{eq}$, a causa di questa variazione aumentano le cariche libere sulle armature di $C_1(x)$

e C_2 e quindi il generatore compie un lavoro $dL = V_0 dq = V_0^2 dC^{eq}$. In definitiva $dW^{tot} = dW - dL = -dW = -1/2 V_0^2 dC^{eq}$, da cui si può ricavare la forza agente sul dielettrico che risulta essere uguale a:

$$F(x) = -\frac{dW^{tot}}{dx} = \frac{V_0^2}{2} \frac{dC^{eq}}{dx} = C_1^{in} \frac{V_0^2}{2} \frac{135d}{(20d + 3x)^2} \quad (5)$$

ne consegue che il lavoro per inserire completamente il dielettrico, copiuta dalla forza (5), è dato da:

$$\mathcal{L} = \int_0^d F(x) dx = \frac{27}{92} C_1^{in} V_0^2 = 26.4 \times 10^{-5} \text{ J} \quad (6)$$