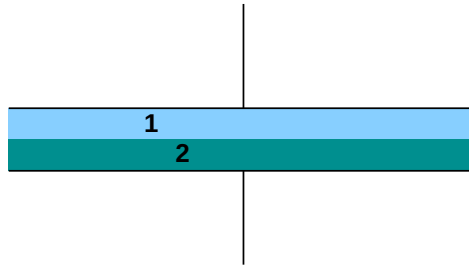




Corso di Laurea in Fisica e F.A.M.
Modulo di Elettromagnetismo 1 (Prof P. Chiaradia)
20 Giugno 2008

Problema

Un condensatore piano ($\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ e $h = 1 \text{ cm}$) è riempito con due dielettrici omogenei, ciascuno dei quali occupa metà dello spessore, aventi costante dielettrica relativa rispettivamente $k_1 = 3$ e $k_2 = 5$.



- 1) Calcolare la capacità del condensatore.
- 2) Se ai capi del condensatore si applica una d.d.p. $V = 1000 \text{ V}$, calcolare le cariche di polarizzazione presenti sulle superfici del dielettrico a contatto con le armature e sulla superficie di separazione.
- 3) Tenendo presente il risultato ottenuto, calcolare la capacità dello stesso condensatore, nel caso in cui lo spazio tra le armature sia riempito da n dielettrici di spessore uguale e pari a h/n e di costante dielettrica relativa
$$k_i = k_1 + (i-1) \frac{k_2 - k_1}{n-1} \quad i = 1, \dots, n$$
- 4) Generalizzare il risultato del punto precedente al caso in cui la costante dielettrica relativa del mezzo tra le armature vari in modo continuo e lineare da k_1 a k_2 .
- 5) Calcolare in quest'ultimo caso la densità di volume delle cariche di polarizzazione ρ_p all'interno del condensatore

Il problema può essere affrontato in diversi modi. Possiamo considerare il condensatore come la serie di due condensatori di stessa area Σ e di spessore $h/2$. In un condensatore piano riempito da un dielettrico omogeneo con costante dielettrica k , considerando che il vettore D vede solo le cariche libere e che vale la relazione $E = D/\epsilon_0 k$ ricaviamo subito che

$$C = \epsilon_0 k \frac{\Sigma}{h}$$

Calcoliamo allora la capacità della serie dei due condensatori, sapendo che si sommano gli inversi delle capacità

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h} \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 3.32 \times 10^{-10} \text{ F}$$

Applicando la tensione V , sempre per quanto detto sopra sul vettore D ed E , si trova facilmente che sulle armature di un condensatore con costante dielettrica k la densità superficiale di carica vale

$$\sigma_p = \frac{Q}{\Sigma} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad Q = VC$$

Dunque, sempre ragionando in termini di due condensatori in serie, le densità di cariche superficiali sulle armature e sulla superficie di separazione saranno rispettivamente

$$\sigma_1 = \frac{VC}{\Sigma} \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) = 2.21 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \quad \sigma_2 = \frac{VC}{\Sigma} \left(1 - \frac{1}{k_2}\right) = 2.66 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_2 = 4.43 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Il segno della densità sulla superficie di separazione dipende da come si polarizza il condensatore, positivo se la tensione positiva viene applicata all'armatura con costante dielettrica maggiore e viceversa.

Se all'interno del condensatore abbiamo n dielettrici, distribuiti come strati di spessore h/n , ciascuno con costante dielettrica k_i , possiamo ragionare come fatto prima e schematizzare il condensatore come una serie di n condensatori. Calcoliamo la capacità sommando gli inversi.

$$C_i = \epsilon_0 k_i \frac{n\Sigma}{h} = \frac{\epsilon_0 n\Sigma}{h} \left[k_1 + \frac{i-1}{n-1} (k_2 - k_1) \right] \quad \frac{1}{C} = \Sigma_i \frac{1}{C_i} = \frac{h}{n\Sigma\epsilon_0} \Sigma_i \frac{1}{\left[k_1 + \frac{i-1}{n-1} (k_2 - k_1) \right]}$$

Se passiamo al continuo, alcuni parametri si trasformano nel modo seguente

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{h}{n} = dx \quad C(x) = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{dx} \left[k_1 + \frac{x}{h} (k_2 - k_1) \right]$$

e la somma sugli inversi delle capacità diventa un integrale

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\Sigma\epsilon_0} \int_0^h \frac{dx}{k_1 + \frac{x}{h} (k_2 - k_1)} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \frac{(k_2 - k_1)}{\ln(k_2/k_1)}$$

La densità ρ_p si calcola dalla relazione

$$\rho_p = \nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} - \mathbf{D}) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{k} - 1 \right) \mathbf{D} \right]$$

Nell'ultima espressione D è costante e l'unica cosa che varia con x è k nel modo

$$k(x) = \epsilon_0 \left[k_1 + \frac{x}{h} (k_2 - k_1) \right] \quad D = \frac{Q}{\Sigma}$$

Facendo la derivata e sostituendo l'espressione di D otteniamo dunque

$$\rho_p = \frac{Q}{\Sigma} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) = \frac{Q(k_1 - k_2)}{\Sigma h \left[k_1 + \frac{x}{h} (k_2 - k_1) \right]^2}$$