



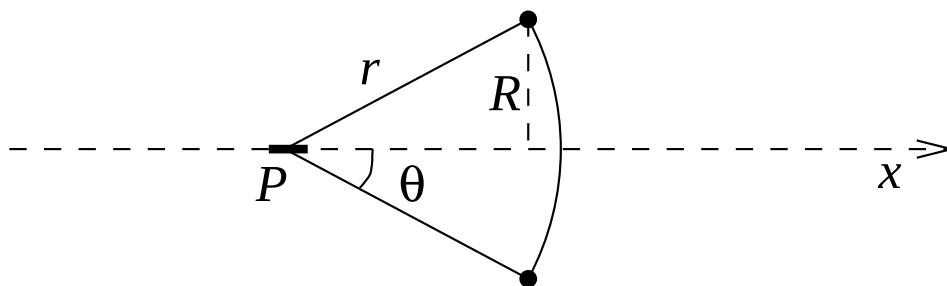
**Corso di Laurea in Fisica e F.A.M.
Modulo di Elettromagnetismo II
(Prof P. Chiaradia)**

23 Febbraio 2009

Problema

Un dipolo magnetico di momento μ si sposta con velocità u costante lungo l'asse (orientato come in figura ed al quale μ rimane parallelo e concorde) di una spira circolare. Inizialmente il dipolo è molto lontano dalla spira. Calcolare:

- il flusso di B concatenato con la spira in funzione dell'angolo θ sotto cui la spira è vista dal dipolo durante il moto (vedi figura);
- la corrispondente f.e.m. indotta nella spira;
- il valore massimo della f.e.m. indotta se il dipolo ha un momento pari a 10^{-5} Am^2 e una velocità $u = 10^2 \text{ m/s}$ e il raggio della spira vale $R = 3 \text{ mm}$.



Suggerimento: si usino le espressioni del campo prodotto da un dipolo in coordinate polari, che valgono:

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \sin \theta}{r^3}$$

Soluzione

Essendo il campo magnetico solenoidale, possiamo calcolare il flusso su una superficie arbitraria che abbia come contorno la spira. Seguendo il suggerimento, considerando il campo nelle sue coordinate polari B_r e B_θ (B_ϕ è identicamente nulla per la simmetria assiale del problema). Converrà allora prendere come superficie Σ la calotta sferica con centro nel dipolo P , raggio r e apertura 2θ (vedi disegno). Infatti B_r è normale a tale superficie mentre B_θ le è tangente e non contribuisce al flusso. Il flusso sarà dunque

$$\Phi_\Sigma(B) = \int_\Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \mu_0 \frac{\mu}{r} \int_0^\theta \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{\mu_0}{2r} \mu \sin^2 \theta = \frac{\mu_0}{2R} \mu \sin^2 \theta$$

Nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $r \sin \theta = R$, che mette in relazione r e θ . Il flusso cresce dal valore 0 per $\theta = 0$ (dipolo nel punto $x = -\infty$) al valore massimo $\mu_0 \mu / 2R$ per $\theta = \pi/2$ (dipolo nel centro della spira) per poi decrescere simmetricamente fino ad annullarsi per $\theta = \pi$ (dipolo nel punto $x = +\infty$). Con ciò si risponde alla prima domanda.

Per avere la variazione nel tempo del flusso, da cui poi ricaviamo la f.e.m. indotta, occorre trovare $d\theta/dt$. Dalla geometria del problema possiamo scrivere $R = -x \tan \theta$, da cui otteniamo

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{u}{R} \sin^2 \theta$$

L'espressione della f.e.m. indotta risulta pertanto

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\mu_0}{2R} \mu \sin^2 \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3\mu_0}{2R^2} \mu u \sin^4 \theta \cos \theta$$

che è la risposta alla seconda domanda.

Per rispondere alla terza domanda e calcolare il valore massimo che la f.e.m. assume durante il moto del dipolo, studiamone l'andamento calcolando la derivata rispetto a θ

$$\frac{df}{d\theta} = -\frac{3\mu_0}{2R^2} \mu u \sin^3 \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$$

Per $\theta = 0$ ($x = -\infty$) sono nulle sia E che dE/dt ; al crescere di θ , cioè all'avvicinarsi del dipolo alla spira, la derivata è negativa fino a che $\cos^2 \theta > 1/5$: in questo intervallo, da $\theta = 0$ a $\theta \simeq 63.5^\circ$, la f.e.m. decresce fino a raggiungere un minimo, appunto per $\theta \simeq 63.5^\circ$. Dopo tale punto la derivata è positiva e la f.e.m. cresce, vale zero per $\theta = 0$ e raggiunge un massimo per $\theta \simeq 116.5^\circ$ (simmetrico dall'altro estremo rispetto alla spira). Infine oltre questo valore la derivata è negativa e la f.e.m. decresce per annullarsi a $\theta = 180^\circ$ ($x = +\infty$).

È interessante osservare che le posizioni di massimo e di minimo della f.e.m. corrispondono alla posizione del dipolo sull'asse $x = \pm R/2$, come si ricava dalla relazione tra x e θ .

Il valore assoluto massimo assunto dalla f.e.m. risulta dunque

$$f_{max} = \frac{3\mu_0}{2R^2} \mu u \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{5}} = 60 \mu V$$