

Esame scritto di Meccanica 2

28 settembre 2009

Esercizio

Una sbarretta di massa $M=4\text{Kg}$ e lunghezza $L=1\text{m}$ ha ai suoi estremi A e B due sferette di massa $m_1=2\text{Kg}$ e $m_2=1\text{Kg}$ rispettivamente. La sbarretta e' vincolata a ruotare intorno ad un asse, perpendicolare ad essa, passante per un punto a distanza x dall'estremo A. Si supponga che il vincolo sia privo di attrito.

A partire dalla posizione verticale di equilibrio, l'asta viene leggermente ruotata e poi lasciata libera di oscillare.

1) Calcolare il periodo T delle piccole oscillazioni in funzione di x e 2) determinare per quale valore di x il periodo è minimo, 3) calcolandone il valore numerico.

SOLUZIONE

La coordinata del centro di massa ed il momento d'inerzia della sbarretta rispetto ad una asse passante per il centro di massa x_{CM} valgono rispettivamente :

$$x_{CM} = \frac{ML/2 + m_2L}{m_1 + m_2 + M} = \frac{L(M + 2m_2)}{2(m_1 + m_2 + M)} = 0.43m$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 + m_1x_{CM}^2 + m_2(L - x_{CM})^2 = 1.03m^2Kg$$

Quindi il momento d'inerzia rispetto al punto x vale:

$$I(x) = I_{CM} + (m_1 + m_2 + M)(x_{CM} - x)^2 = I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2$$

L'equazione del moto per piccoli oscillazioni rispetto alla verticale (posso scrivere $\sin\theta \approx \theta$) sarà data dalla seconda equazione cardinale della meccanica :

$$M_{ext} = \frac{dL}{dt} = I(x)\ddot{\theta} \quad \text{dove} \quad M_{ext} \approx M_{tot}g(x_{CM} - x)\theta$$

Sostituendo tutti i termini otteniamo:

$$\ddot{\theta} - \frac{gM_{tot}(x_{CM} - x)}{I(x)}\theta = 0$$

la cui soluzione $\theta(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ descrive un moto armonico di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I(x)}{M_{tot}g(x_{CM} - x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{M_{tot}g}} \sqrt{\frac{I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2}{x_{CM} - x}}$$

Per determinare il valore di x per cui il periodo è minimo imponiamo che la sua derivata si annulli in tal punto:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{M_{tot}g}} \sqrt{\frac{x_{CM} - x}{I(x)}} \left[\frac{-2M_{tot}(x_{CM} - x)^2 + I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2}{(x_{CM} - x)^2} \right]$$

tale derivata si annulla per $x = x_{CM}$, ma in tal caso il periodo diventa infinito. Si annulla anche per:

$$x = x_{CM} \pm \sqrt{\frac{I_{CM}}{M_{tot}}} \text{ le cui soluzioni sono } x_1 = 81.4 \text{ cm e } x_2 = 4.6 \text{ cm. L'unica soluzione che ha senso}$$

si ha per $x=x_2$, dove il periodo vale 1.76 sec, mentre per $x=x_1$ si tenta di fare la radice di un numero negativo.