

MECCANICA

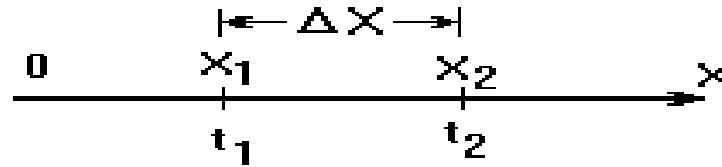
(studio del moto dei corpi)

Cinematica: descrizione del moto

Dinamica: descrizione del moto in funzione della forza

CINEMATICA del punto materiale

Moto in una dimensione

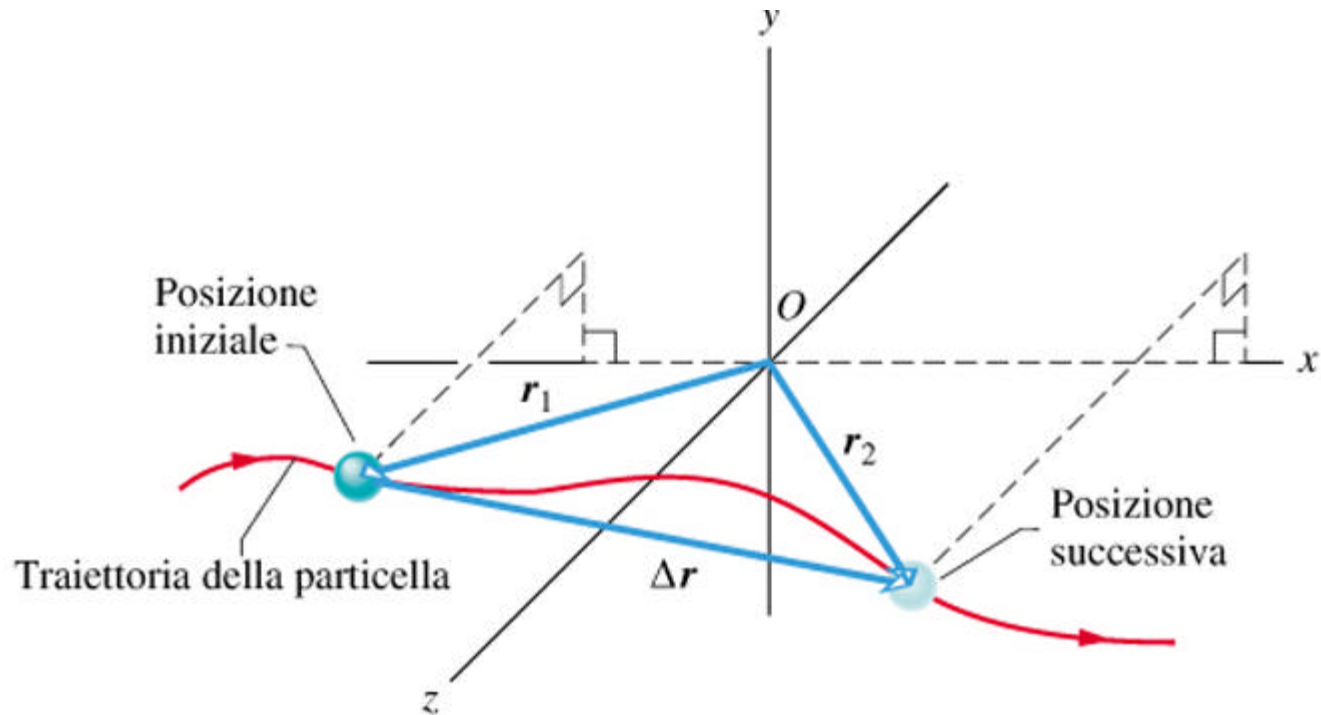


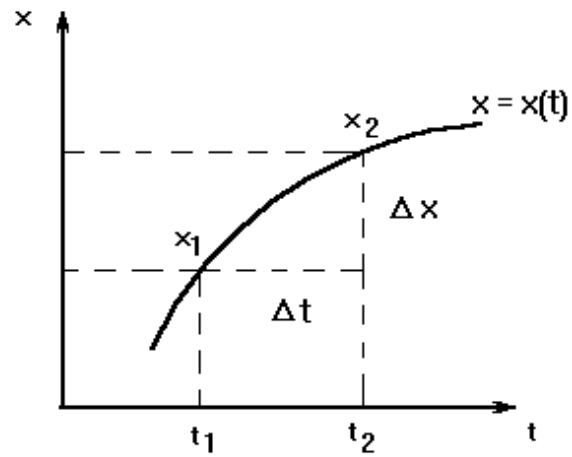
$x_2 - x_1$ distanza percorsa

$t_2 - t_1$ tempo trascorso

La legge del moto è rappresentata dalla funzione: $\mathbf{x} = \mathbf{x(t)}$

VETTORE SPOSTAMENTO

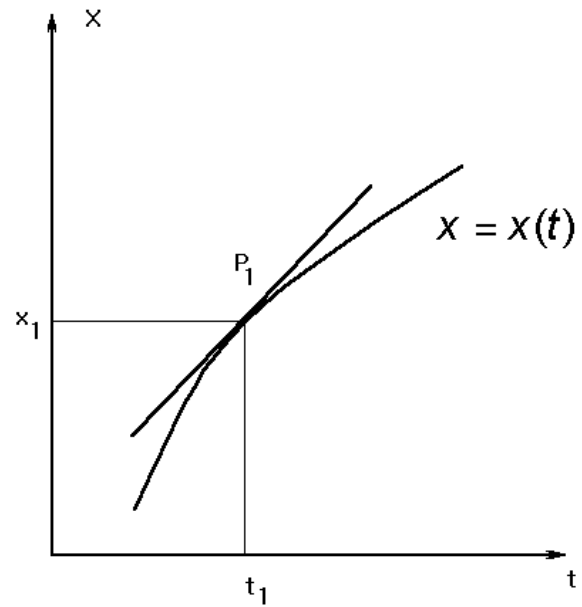




Velocità media:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$



Velocità istantanea:

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v$$

Velocità

$$v = \frac{dx}{dt}$$

• rapidità con cui la posizione (x) varia nel tempo (t)

• grandezza fisica vettoriale $\vec{v}$

• $v = |\vec{v}| = \text{modulo di } \vec{v}$

• modulo $\propto$ lunghezza freccia



DIMENSIONI

$\vec{x}$ $\rightarrow$ spazio $\rightarrow L^0$ lunghezza

$\vec{t}$

$\vec{t}$ $\rightarrow$ tempo $\rightarrow T^0$ tempo

$$[v] = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}} = LT^{-1}$$

UNITÀ DI MISURA S.I.

ms⁻¹ Sistema Internazionale

Moto unidimensionale

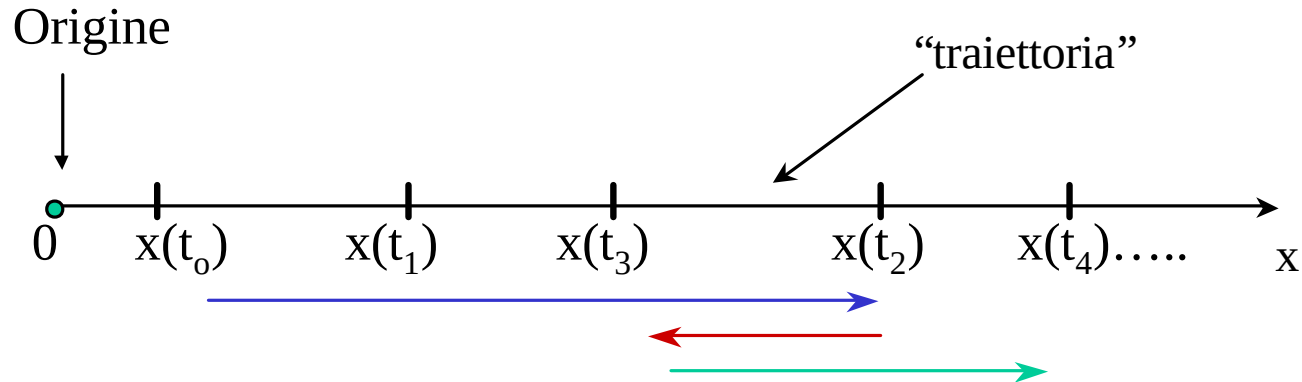
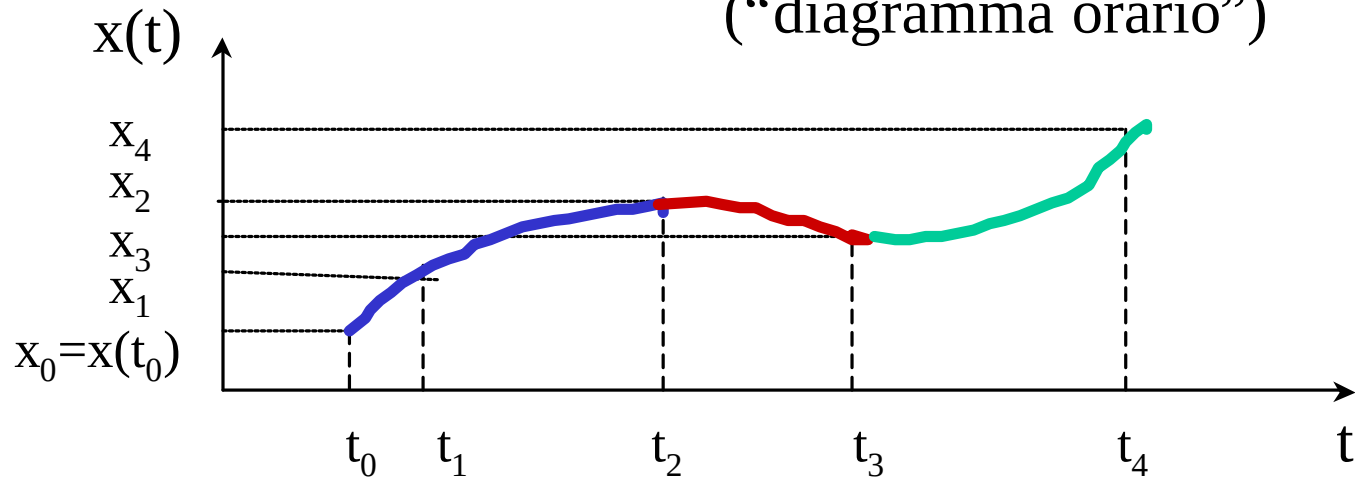


Grafico della legge del moto:

(“diagramma orario”)

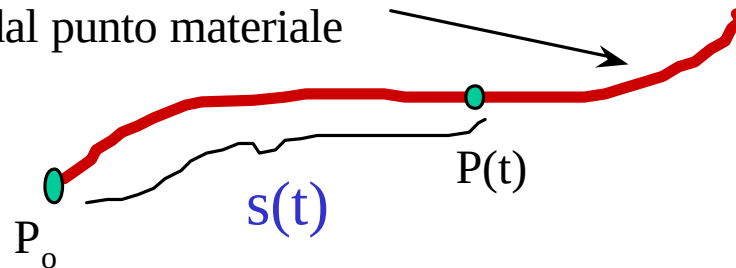


Coordinata curvilinea e velocità scalare media

“Coordinata curvilinea” $s(t)$:

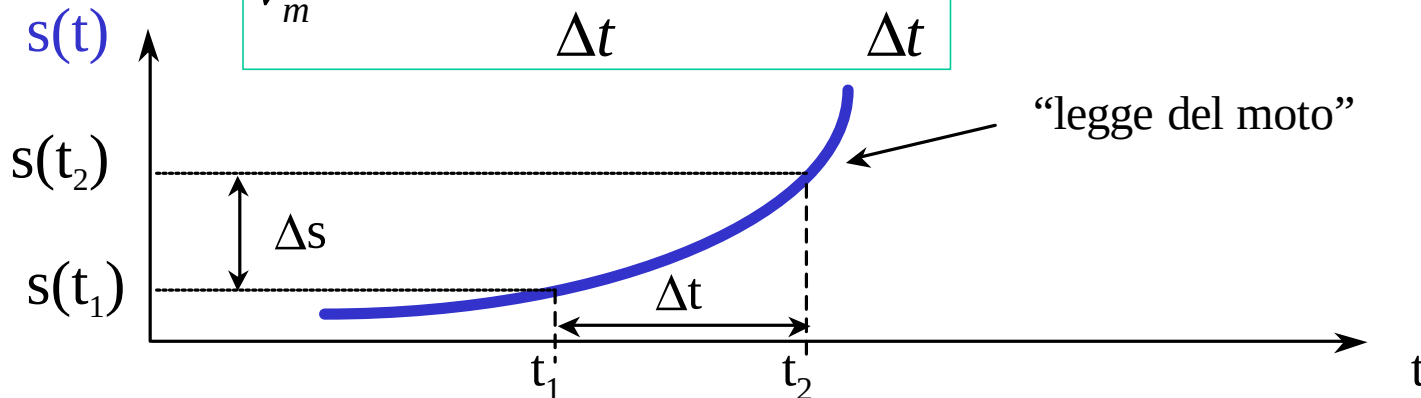
- spazio percorso al tempo t lungo la
“**traiettoria**”

luogo geometrico dei punti dello
spazio occupati dal punto materiale
durante il moto



Velocità scalare media tra due istanti t_1 e $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$v_m = \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

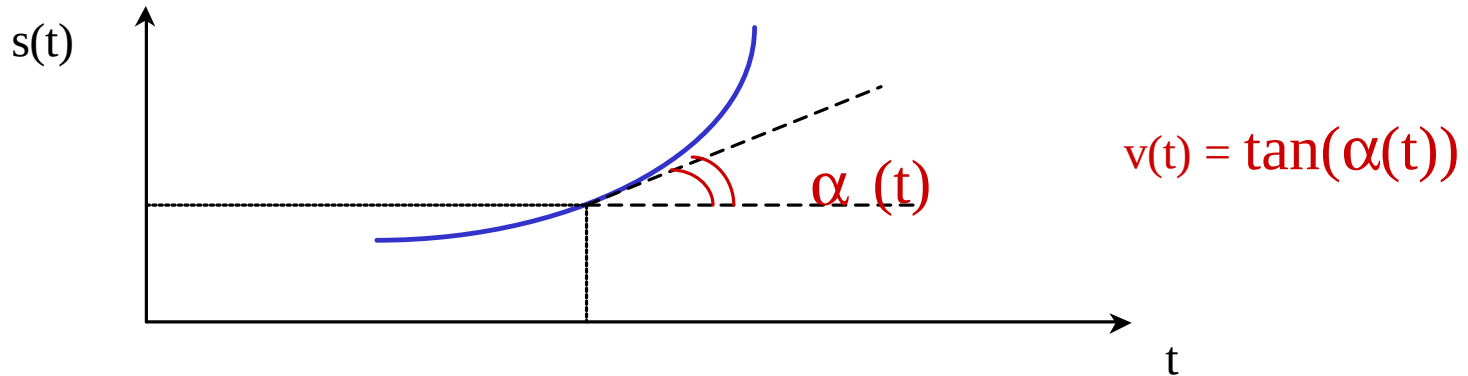


Velocità scalare istantanea

E' la derivata rispetto al tempo della coordinata curvilinea $s(t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt}$$

(dimensione : $[v] = \text{m/s}$) :

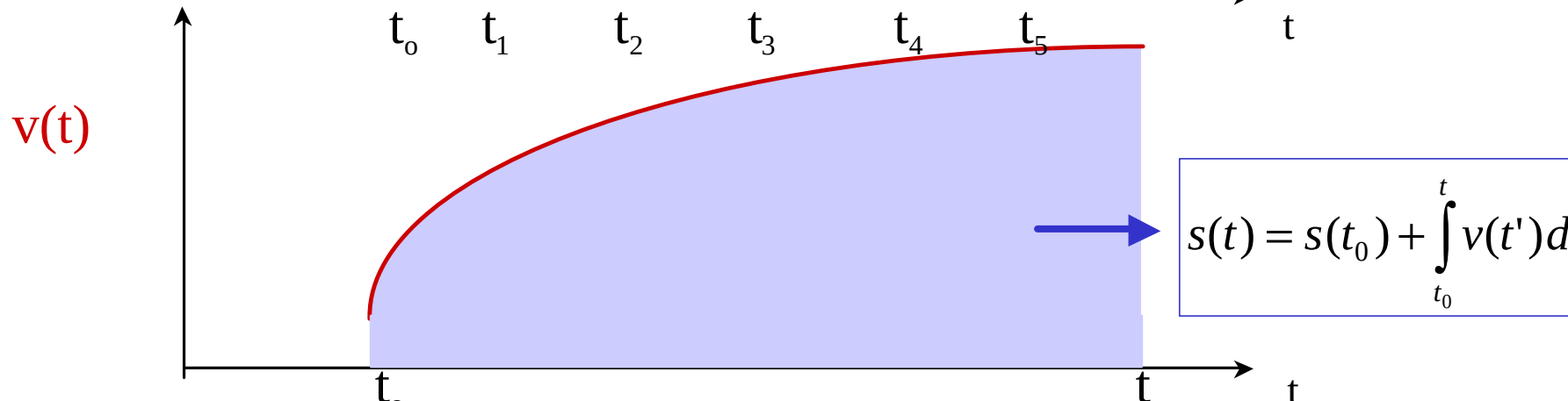
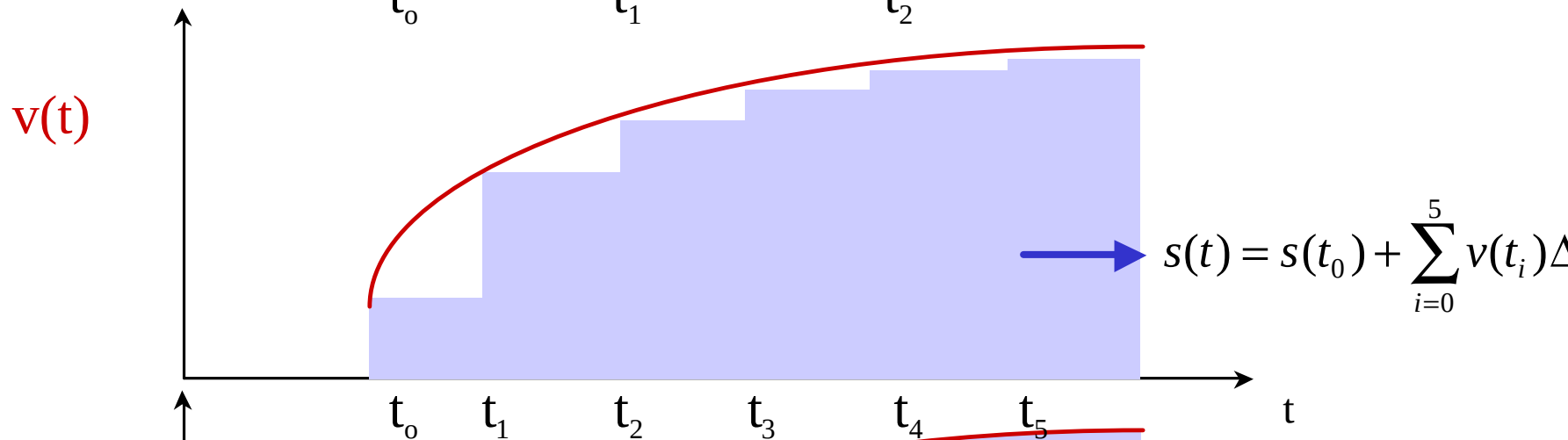
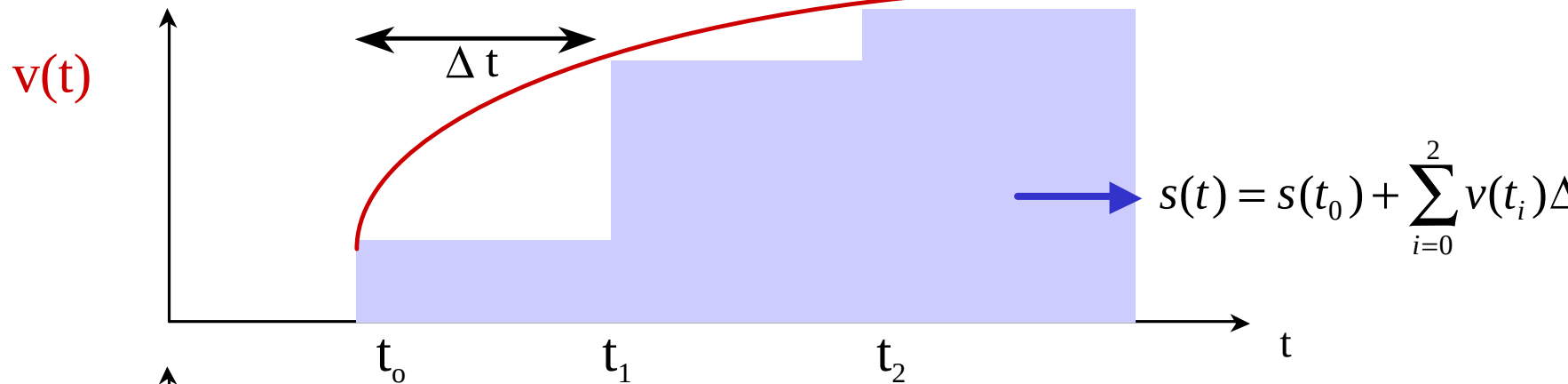


Nota la funzione $v(t)$, la legge del moto $s(t)$ si ottiene per integrazione:

$$ds = v(t) dt \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \int_{s_0}^s ds = s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

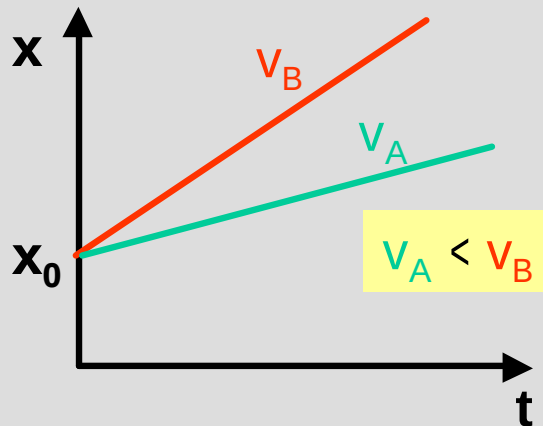
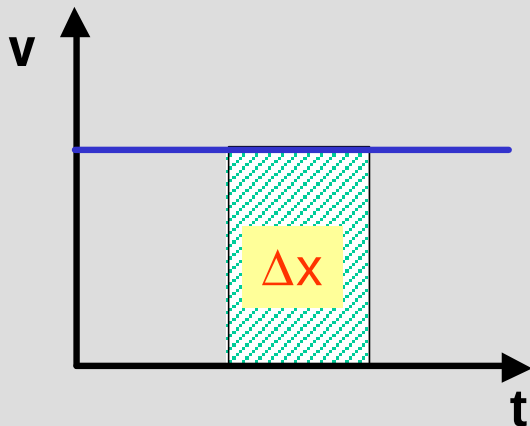
Integrazione della velocità



Moto rettilineo uniforme - Diagrammi

Nel diagramma (v,t) la legge “ $v = \text{costante}$ ” è rappresentata da una retta parallela all'asse x . L'area tratteggiata in figura rappresenta lo spazio percorso nel tempo Δt .

Nel diagramma (x,t) la legge “ $x = x_0 + vt$ ” è rappresentata da una retta la cui pendenza è positiva se la velocità è > 0 , negativa se è $v < 0$ ed è tanto maggiore in valore assoluto quanto più grande è la velocità v .



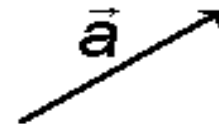
Accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

• rapidità con cui la velocità (v) varia nel tempo (t)

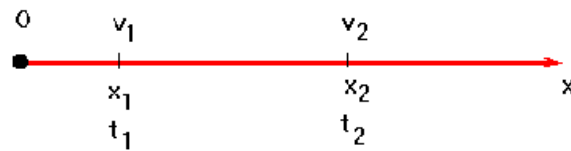
• grandezza fisica vettoriale $\vec{a}$

• $a = |\vec{a}| = \text{modulo di } \vec{a}$



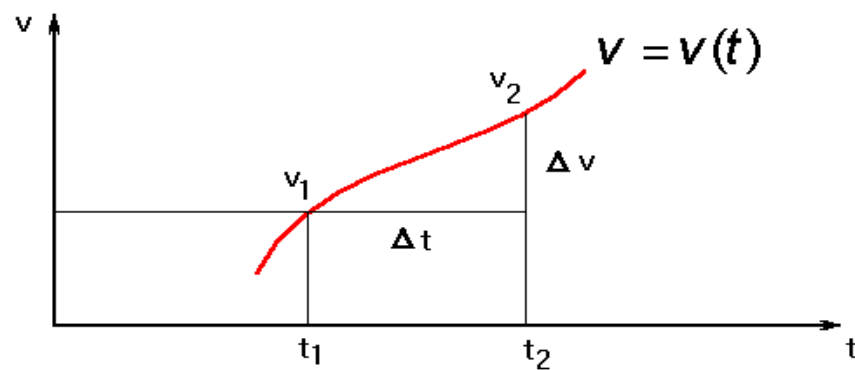
• modulo di $a \propto$ lunghezza della freccia

Accelerazione media:



$$v_2 - v_1 = \Delta v$$

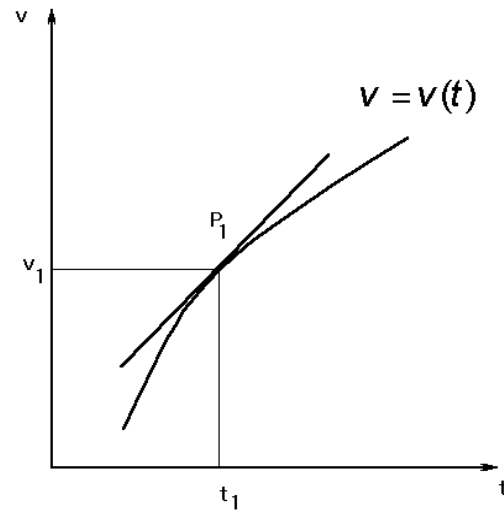
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{?v}{?t}$$



Accelerazione istantanea:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$



DIMENSIONI

$$[a] = LT^{-2}$$

$$[a] = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^2} = LT^{-2}$$

UNITÀ DI MISURA S.I.

ms⁻² Sistema Internazionale

Reazioni fisiologiche all'accelerazione

- Perdita vista 35 g
- Perdita sensi 6 g

Esempi:

Frenata auto $\Rightarrow$ $0.25 \div 0.45$ g auto $\Rightarrow$ (3 $\div$ 6 s)

Incidente auto $\Rightarrow$ 20 $\div$ 100 g $\Rightarrow$ (0.1 s)

Decollo aereo $\Rightarrow$ 0.5 g $\Rightarrow$ (10 $\div$ 20 s)

Atterr. Paracadute $\Rightarrow$ 34 g $\Rightarrow$ (0.1 $\div$ 0.2 s)

Nota l'accelerazione in funzione del tempo $a(t)$:

1. INTEGRANDO $a(t)$ SI TROVA $v(t)$

2. INTEGRANDO $v(t)$ SI TROVA $x(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = a dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int a dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad dx = v dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int v dt$$

Per giungere a $x(t)$ si deve conoscere il valore della **POSIZIONE** e della **VELOCITÀ** ad un particolare istante (generalmente all'inizio del moto $t=0$)

$$\begin{array}{ll}
 1. & a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \\
 2. & v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{condizioni} \\
 \text{iniziali} \\
 \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ x_0 \\ v_0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

a=cost

$$1) \quad v - v_0 = a \int_0^t dt$$

$$v = v_0 + at$$

2)

$$x - x_0 = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt$$

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2} at^2$$

3)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Riassumendo:

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\vec{a} = \text{cost}$$

$$v = a t$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = 2 a x$$

FORMA
SEMPLIFICATA

$$v = v_0 + a t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0)$$

FORMA
GENERALE

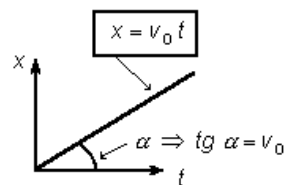
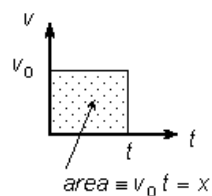
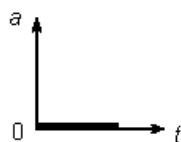
(a)

MOTO RETTILINEO
UNIFORME

$$a = 0 \quad \begin{cases} x(t=0) \equiv x(0) = 0 \\ v(t=0) \equiv v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow v = \text{cost} = v_0$$

$$\rightarrow x = \int_0^t v \, dt = v_0 \int_0^t dt = v_0 t$$



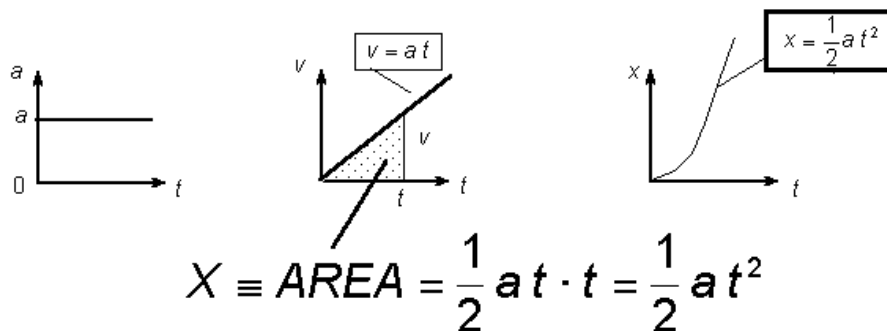
b)

MOTO UNIFORMEMENTE
ACCELERATO

$$a = \text{cost} > 0 \quad \begin{cases} x(t=0) \equiv x(0) = 0 \\ v(t=0) \equiv v(0) = 0 \end{cases}$$

$$v = a \int_0^t dt = a t$$

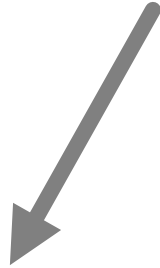
$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t a t dt = a \int_0^t t dt$$



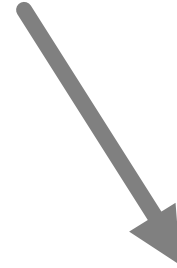
$$t = \frac{v}{a} \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2} a \frac{v^2}{a^2} \quad \text{e} \quad v^2 = 2ax$$

velocità al variare di X $\ddot{y}$ e $v = \sqrt{2ax}$

EQUAZIONI DIMENSIONALI



modo utile per mettere
in evidenza se una
equazione è corretta
(dimensionalmente).



verificare le dimensioni di
tutti i suoi termini.

Esempio:

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$x \Rightarrow L$$

$$x_0 \Rightarrow L$$

$$v_0 t \Rightarrow \frac{L}{T} T = L$$

$$\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{L}{T^2} T^2 = L$$

Accelerazione

Accelerazione scalare media :

$$a_m = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(dimensione : $[a] = \text{m/s}^2$)

Accelerazione scalare istantanea :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds(t)}{dt} \right) \equiv \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

Nota la funzione $a(t)$, la velocità $v(t)$ si ottiene per integrazione:

$$dv = a(t) dt \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \int_{v_0}^v dv = v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(t') dt'$$



$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt'$$

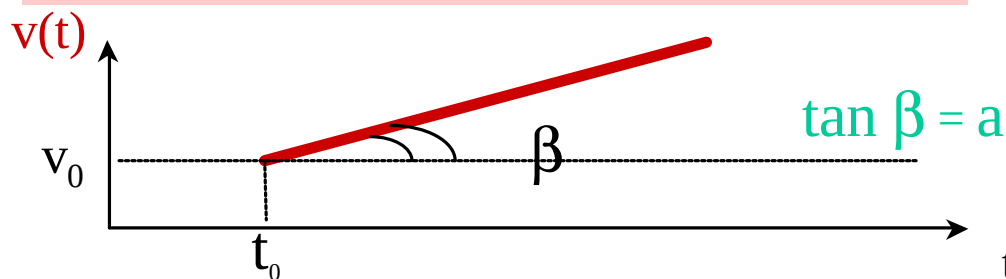
Moto rettilineo uniformemente accelerato

accelerazione costante: $a(t) = a$



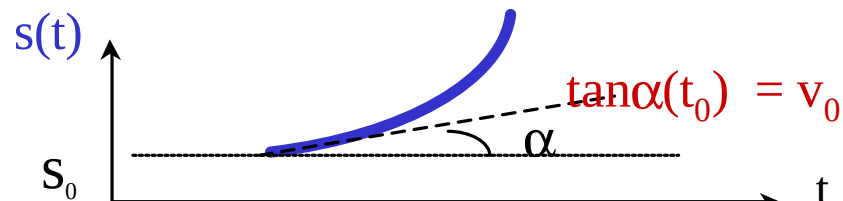
velocità:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt' = v_0 + a(t - t_0)$$



posizione:

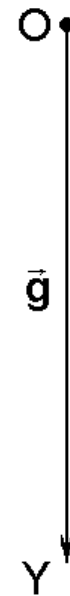
$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt' = s_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t' - t_0)] dt' =$$
$$= s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$



Accelerazione di gravità (g)

- ✓ Oggetto che cade vicino alla superficie terrestre
- ✓ Resistenza aria trascurabile

Il moto è
uniformemente accelerato
lungo la verticale.



$$v = g t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \sqrt{2 g y}$$

$$\vec{a} \equiv \vec{g}$$

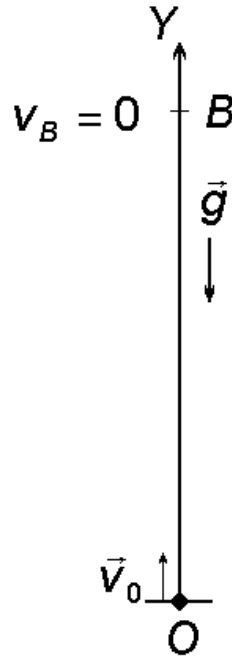
$$g = \text{cost} = 9.8 \, m \, s^{-2}$$

↑
è la stessa per
tutti gli oggetti
(in un determi-
nato luogo)

Oggetto lanciato verticalmente verso l'alto:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + a t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_0 - g t \\ Y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_0^2 - 2 g Y \end{array} \right\}$$

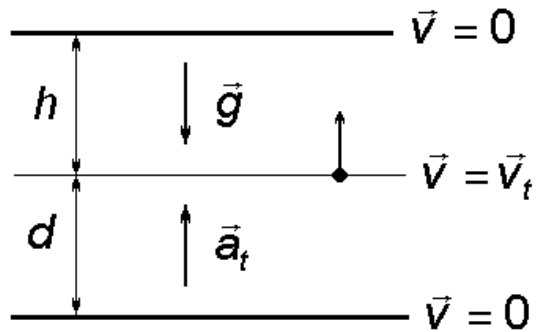


in B

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - g t_1 \\ Y_B &= v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ 0 &= v_0^2 - 2 g Y_B \end{aligned}$$

Le equazioni danno in ogni istante velocità e posizione lungo tutto il moto.

SALTO VERTICALE



h =altezza del salto

d =rincorsa di accelerazione

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (x - x_0)$$

$$h \Rightarrow 0 = v_t^2 - 2 g h \Rightarrow v_t = \sqrt{2 g h} = 4.43 \sqrt{h}$$

$$d \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_t^2 = 2 a_t d \\ v_t^2 = 2 g h \end{array} \right\} \Rightarrow a_t = \left(\frac{h}{d} \right) g$$

	h	d	v_t	a_t
	(m)	(m)	(ms ⁻¹)	(ms ⁻²)
Uomo	1.0	0.5	4.43	2.0 g
Canguro	2.4	1.0	7.28	2.7 g
Rana	0.3	$9 \cdot 10^{-2}$	2.34	3.3 g
Pulce	0.1	$8 \cdot 10^{-4}$	1.40	125 g

$$\text{SE } a_t \text{ uomo} = a_t \text{ pulce} = 125 \text{ g}$$

$$v_t = \sqrt{2 a_t d} = \sqrt{2 \cdot 125 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = \sqrt{1225} = 35 \text{ m s}^{-1}$$

$$h = \frac{v_t^2}{2g} = \frac{35^2}{2 \cdot 9.8} = 62.5 \text{ m}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

La traiettoria è una retta e l'accelerazione è costante

$$a = \Delta v / \Delta t \rightarrow \Delta v = a \Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \rightarrow v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1)$$

Per $t_1=0$, e $v_1=v_0$, eliminiamo il pedice “2”, e abbiamo:

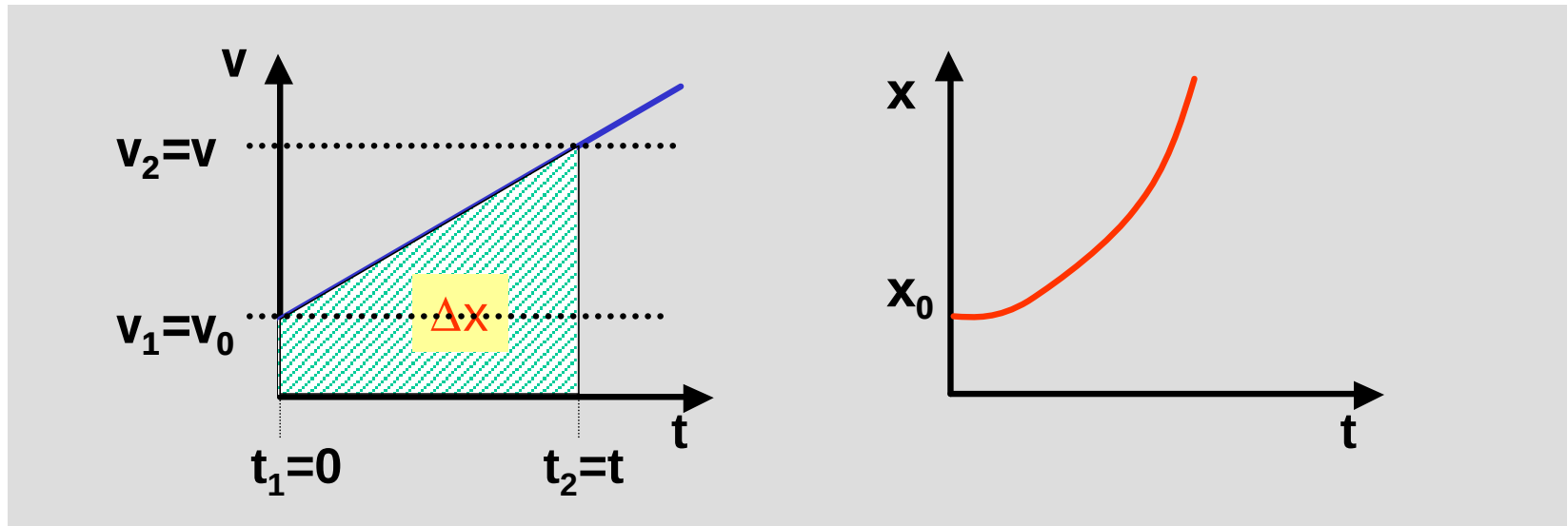
$$v = v_0 + at$$

Anche in questo caso lo spazio percorso sarà dato dall'area tratteggiata nel diagramma (v,t), pertanto, la legge oraria del moto uniformemente accelerato è:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Nel diagramma (x,t) “ $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ” è rappresentata da una parabola.

Moto rett. uniform. acc. - Diagrammi



Posso considerare il trapezio come la somma del rettangolo di lati t e v_0 e del triangolo rettangolo di cateti $v-v_0$ e t . La sua area è data allora da:

$$\text{Area} = v_0 t + \frac{1}{2}(v-v_0)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{essendo: } v-v_0 = at)$$

$$\Delta x = \text{Area tratteggiata} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \text{ ma } \Delta x = x - x_0 \rightarrow$$

$$x = x_0 + \Delta x \rightarrow x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

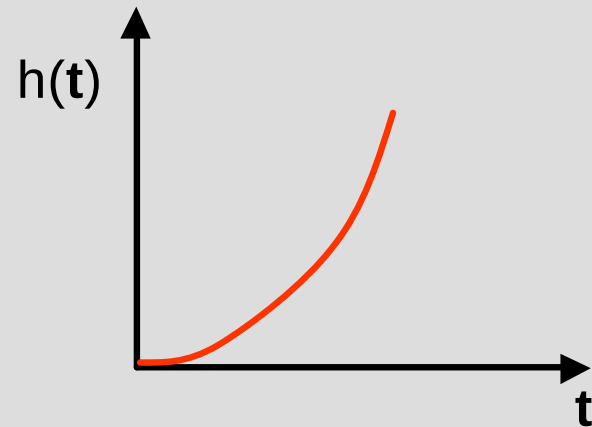
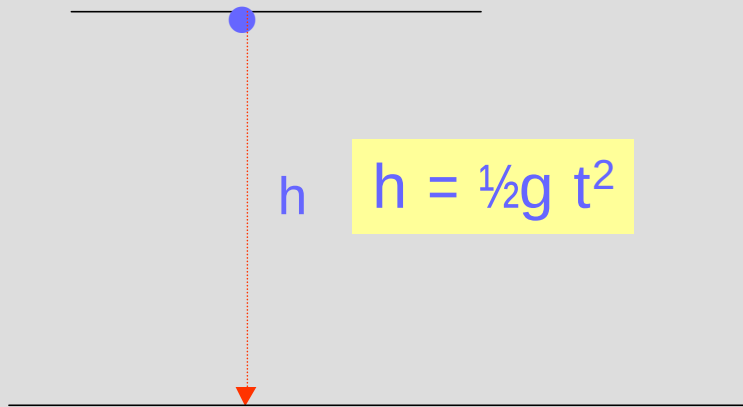
Moto di caduta libera di un corpo

Tutti i corpi, vicino alla superficie terrestre, lasciati liberi (si trascura la resistenza dell'aria), cadono lungo la verticale con la stessa accelerazione $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, pertanto, la relazione tra l'altezza di caduta h e il tempo t necessario a toccare il suolo è:

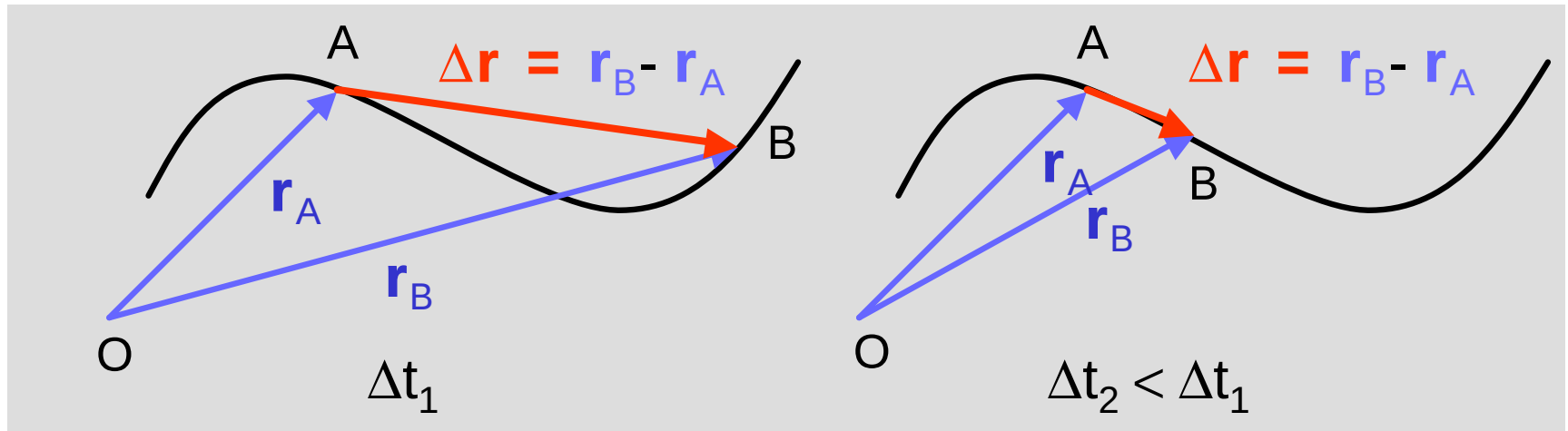
$$h = \frac{1}{2}g t^2 \quad \text{e,} \quad t = (2h/g)^{\frac{1}{2}}$$

La velocità d'impatto è:

$$v = g t = g (2h/g)^{\frac{1}{2}} = (2gh)^{\frac{1}{2}}$$



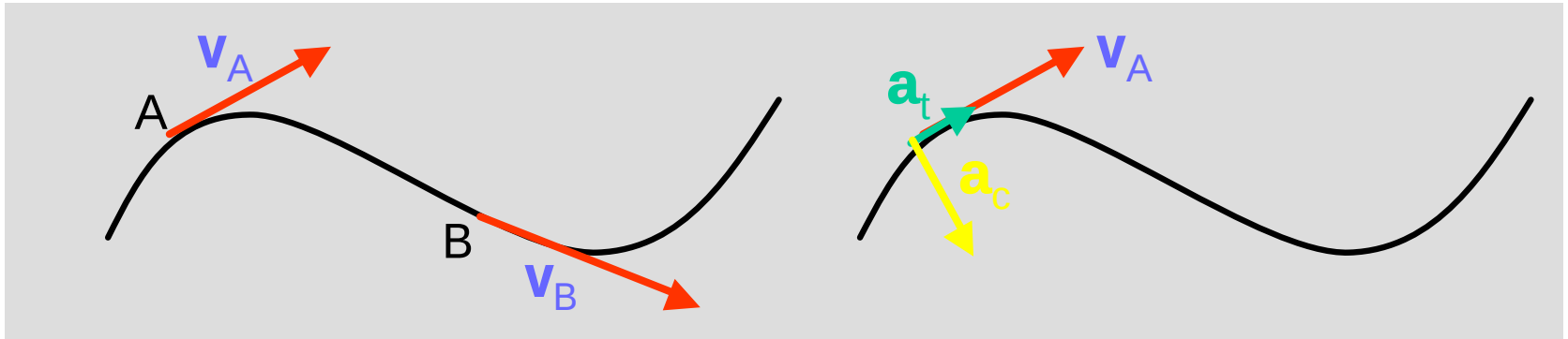
Moto sul piano - Illustrazione



Il modulo del vettore spostamento è diverso dalla lunghezza dello spazio percorso, in particolare, se la traiettoria è chiusa ($A \equiv B$), lo spostamento è zero, ma lo spazio percorso è diverso da zero.

E' interessante, però, osservare che al diminuire di Δt , B si avvicina ad A e la traiettoria tende ad identificarsi con lo spostamento; pertanto, la velocità istantanea (che si ottiene quando $\Delta t \approx 0$) è tangente alla traiettoria.

Moto sul piano - Velocità e accelerazione



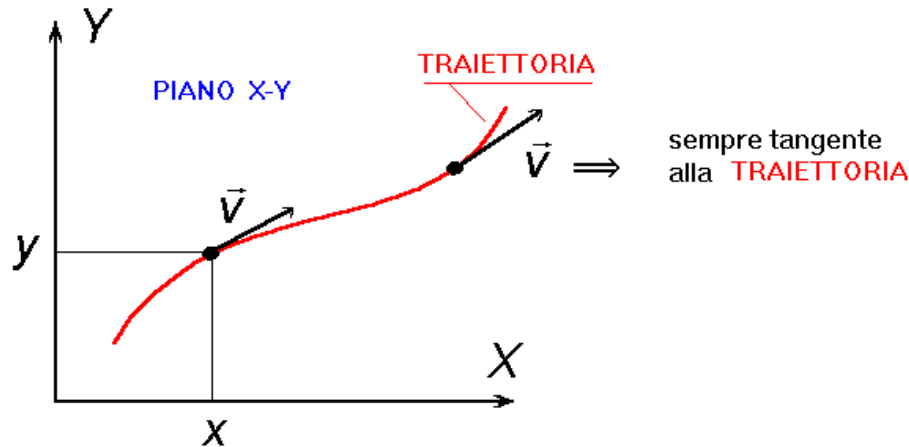
Se la traiettoria non è rettilinea, la direzione del vettore velocità cambia da punto a punto, pertanto si deve introdurre un'accelerazione vettoriale, media e istantanea.

L'accelerazione istantanea può essere scomposta in due componenti: una parallela, l'altra perpendicolare alla velocità.

La componente parallela, $\mathbf{a}_t$, modifica il modulo della velocità.

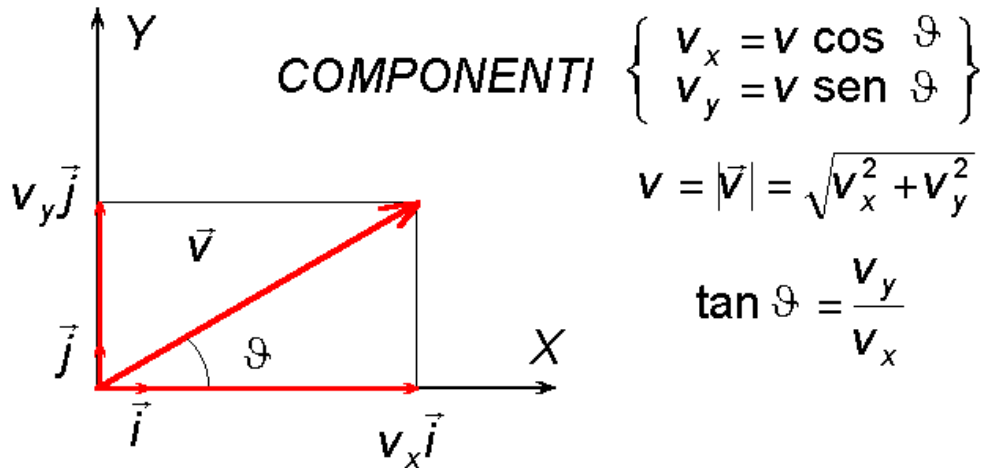
La componente perpendicolare, $\mathbf{a}_c$, (o centripeta, perché diretta verso il centro di curvatura locale della traiettoria) modifica la direzione della velocità.

MOTO IN DUE DIMENSIONI



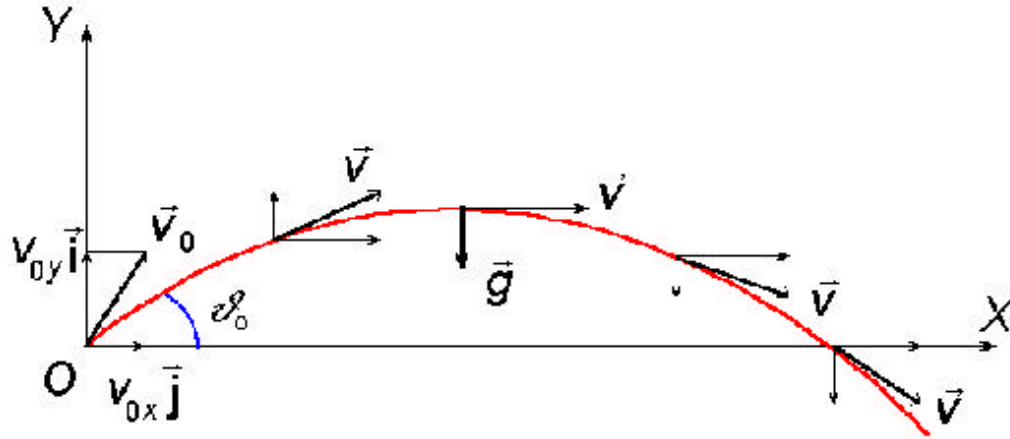
$$\rho \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$



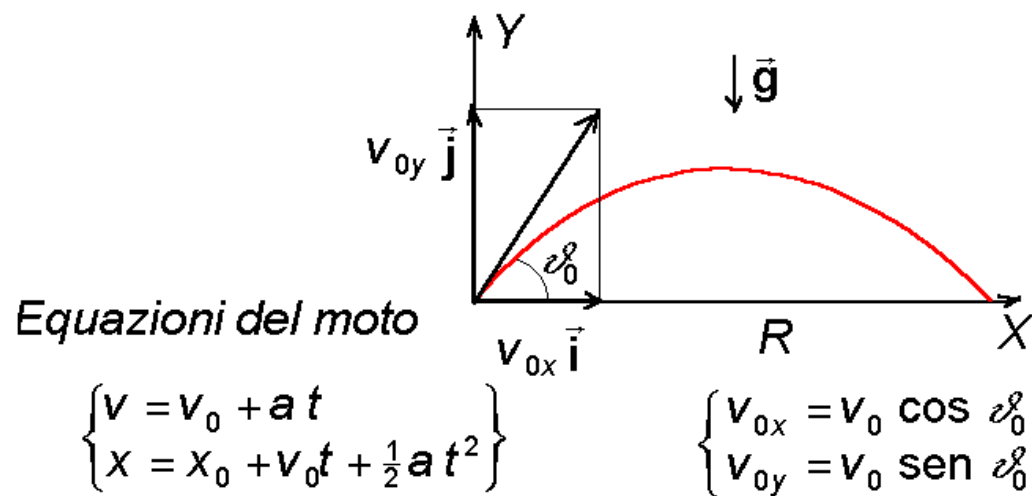
Importante:
solo se modulo -
direzione - verso della
velocità sono costanti
 durante il moto al
 variare del tempo t

MOTO DEI PROIETTILI



Descrizione vettoriale del moto $\Rightarrow$ Sovrapposizione

- MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
VERTICALE (ASSE Y) $a_x = 0$
- MOTO UNIFORME ORIZZONTALE
(ASSE x) $\vec{v} = \text{cost}$



MOTO IN DIREZIONE X

$a_x = 0$ moto uniforme

● $\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{0x} = \text{cost} \\ X = v_{0x} t \end{array} \right.$

MOTO IN DIREZIONE Y

$a_y = -g$ moto uniformemente accelerato

$$\bullet \bullet \begin{cases} v_y = v_{0y} - g t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

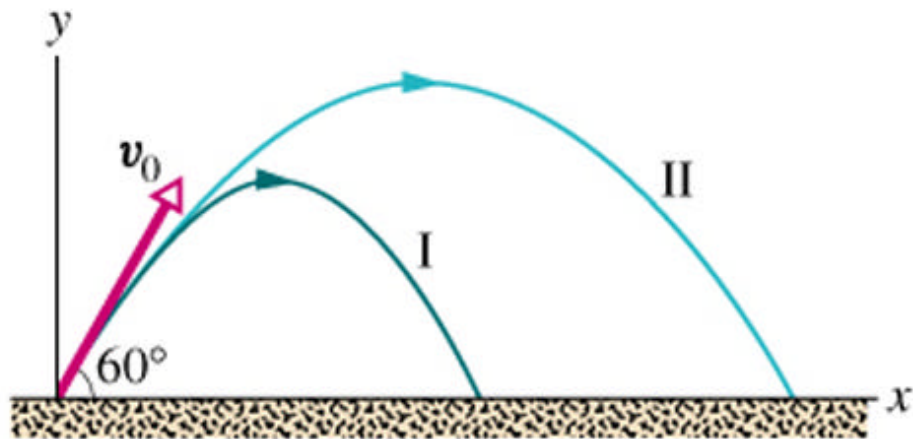
$$\bullet t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \bullet \bullet y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{v_{0x}^2} \right) x^2 \quad \text{PARABOLA}$$

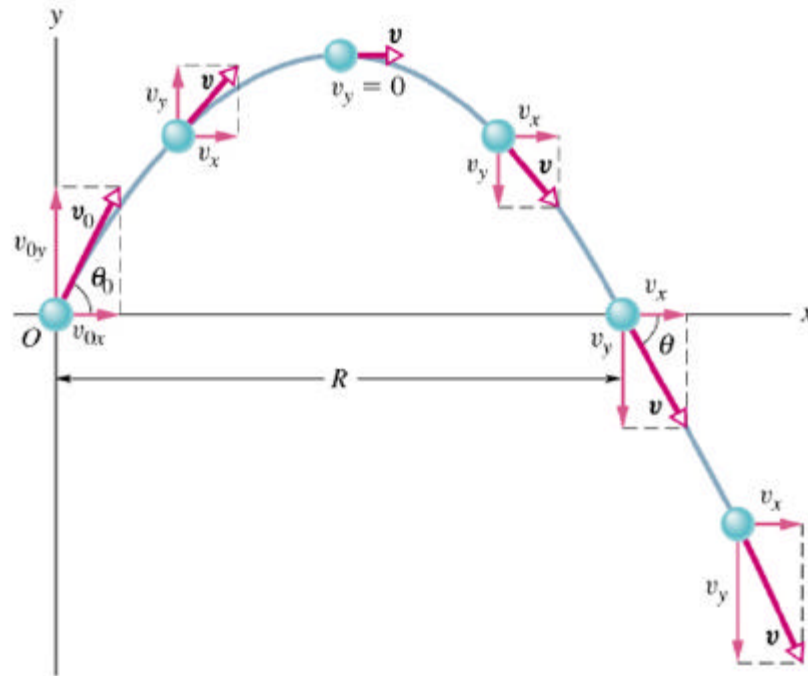
$$2 \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = \text{GITTATA } R$$

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta_0 \quad (R_{\max} \Rightarrow \vartheta_0 = 45^\circ)$$

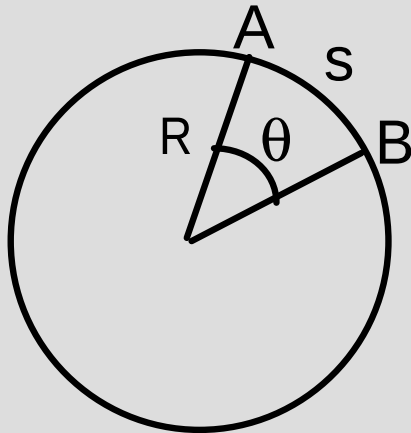
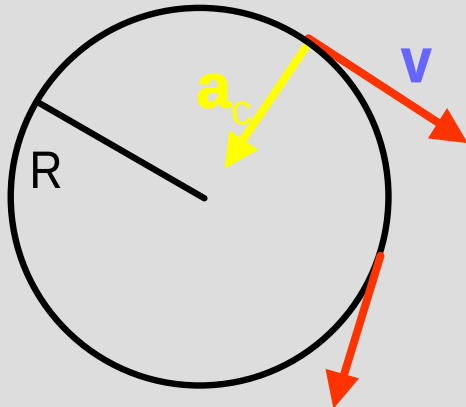
Gittata



Andamento della velocità



Moto circolare uniforme



Traiettoria circolare, velocità costante in modulo.

Accelerazione solo centripeta di modulo " $a_c = v^2/R = \omega^2 R$ "

R = raggio della circonferenza

$v = s/\Delta t$ modulo della velocità,

$\omega = \theta/\Delta t$ = velocità angolare

Essendo: $\theta = s/R \rightarrow s = \theta R \rightarrow$

$v = \theta R / \Delta t = (\theta / \Delta t) R \rightarrow v = \omega R$

Questo moto è periodico e il periodo T è pari a:

$$T = 2\pi R/v = 2\pi/\omega$$

La frequenza è $\nu = 1/T$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$v \equiv |\vec{v}| = \text{cost}$$

$$\vec{v} \neq \text{cost}$$



Vettore $\vec{v}$ varia in
direzione e verso

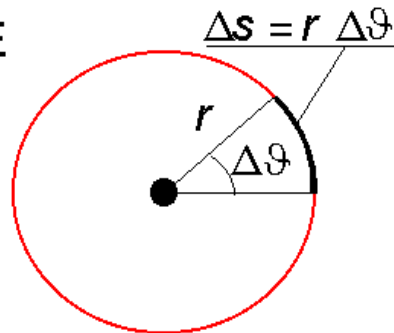
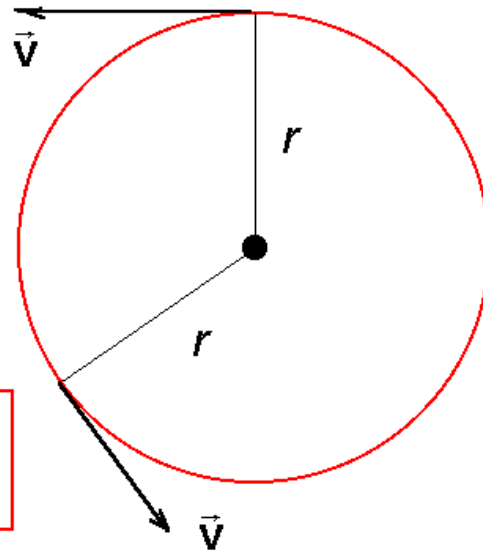
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \Delta \vartheta}{\Delta t} = \omega r$$



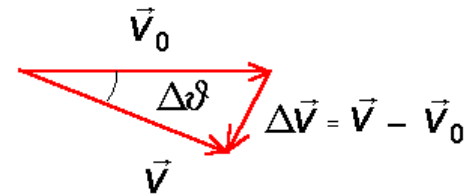
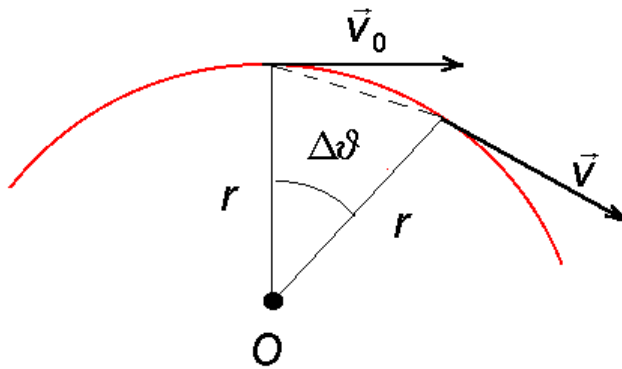
VELOCITÀ TANGENZIALE

$$\omega = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} =$$

VELOCITÀ
ANGOLARE
(rad s⁻¹)



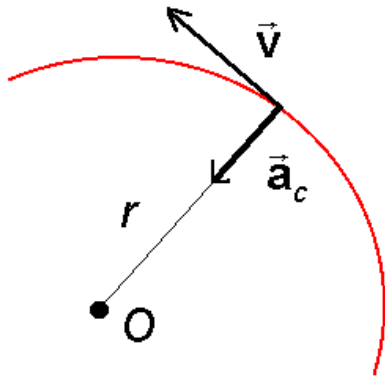
Consideriamo un
punto materiale che
si muove lungo una
circonferenza con
velocità costante in
modulo



$$\Delta v \approx v \Delta\theta \Rightarrow (\Delta t \approx 0)$$

La direzione del vettore $\Delta \vec{v}$ è lungo il raggio, verso il centro

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow v \omega = \omega^2 r$$



$$v = \omega r$$

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

MOTO CIRCOLARE
UNIFORME

accelerazione centripeta

$\Rightarrow$

$\vec{v} \Rightarrow$ tangenziale

$\vec{a}_c \Rightarrow$ radiale

$T = \text{PERIODO (s)}$: Tempo necessario per fare un giro completo

$f = T^{-1} = \text{Frequenza (s}^{-1}\text{=Hz)}$: Numero di giri nell'unità di tempo

$$v = \frac{2 \pi r}{T} = 2 \pi r f \quad (m s^{-1})$$

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} = 2 \pi f \quad (rad s^{-1})$$

Moto circolare uniforme

- Accelerazione centripeta:

$$a_c = \omega^2 R$$

$$x = R \cos[\omega t]$$

$$y = R \sin[\omega t]$$

$$v_x = -R \omega \sin[\omega t]$$

$$v_y = R \omega \cos[\omega t]$$

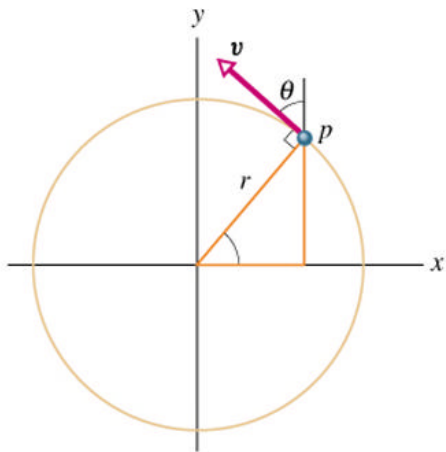
continua

$$a_x = -R \omega^2 \cos[\omega t] = -\omega^2 x$$

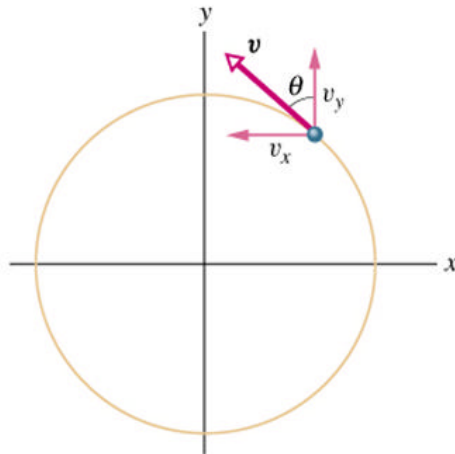
$$a_y = -R \omega^2 \sin[\omega t] = -\omega^2 y$$

$$\rightarrow a = \omega^2 R = v^2 / R$$

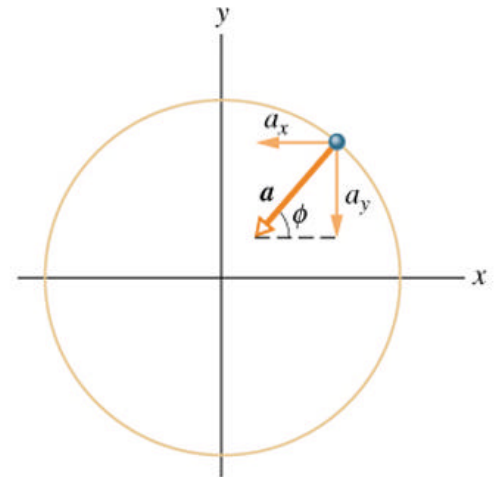
Graficamente



(a)

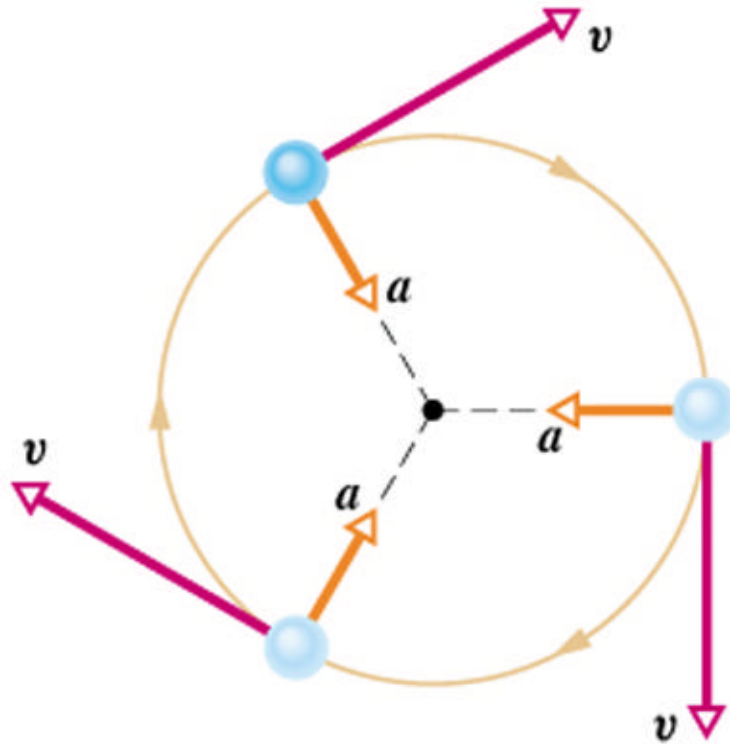


(b)

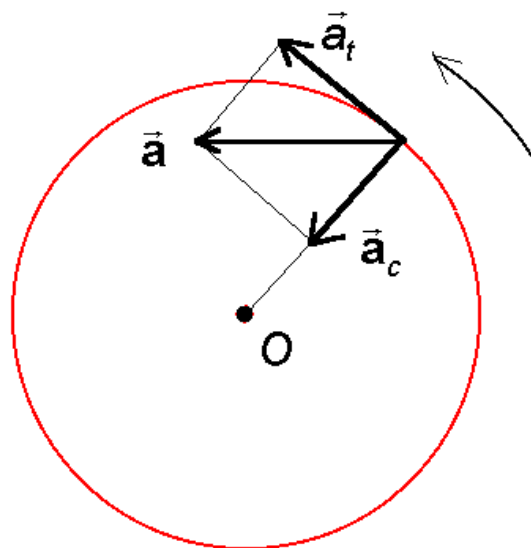


(c)

Conclusione



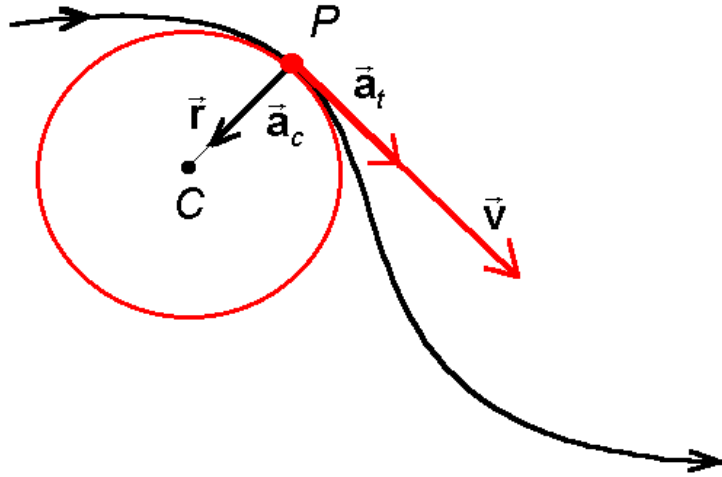
MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME



$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \neq 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

MOTO CURVO

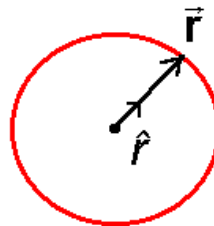


r = raggio di curvatura nel punto P

$$\vec{a}_t \neq 0$$

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{r} \quad \perp \quad \text{moto} \quad (\text{radiale})$$

(notazione vettoriale $\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$)



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \text{VERSORE}$$