

Proprieta' meccaniche dei fluidi

1. Definizione di fluido: liquido o gas
2. La pressione in un fluido
3. Equilibrio nei fluidi: legge di Stevino
4. Il Principio di Pascal
5. Il barometro di Torricelli
6. Il principio di Archimede
7. Moto in un fluido: fluido ideale
8. Regime stazionario. Portata
9. Il teorema di Bernoulli

I fluidi

Una sostanza che non è dotata di forma propria è detta **fluido**. I **fluidi** assumono la forma del recipiente che li contiene.

Sono fluidi :

le sostanze liquide - che hanno volume definito ed una superficie limite

le sostanze gassose - che non hanno volume definito e tendono ad occupare tutto il volume a disposizione.

La densità dei liquidi $\rho = M/V$ è molto maggiore di quella dei gas (di circa un fattore 10^3)

I **liquidi** sono **incompressibili** (non variano il volume se sono sottoposti ad una forza esterna) mentre i **gas** sono facilmente **compressibili**.

Le proprietà dei liquidi e dei solidi dipendono dalla loro struttura microscopica, ovvero dal legame tra le molecole.

Inoltre dal punto di vista meccanico il fluido si può pensare composto da elementi infinitesimi di massa $dm = \rho \, dV$, che scorrono tra loro in una qualunque direzione.

La pressione in un fluido

Non e' possibile parlare di una forza applicata ad un fluido. Per ciascun elemento del fluido si considerano:

-forze di volume (applicate a tutto il volume dV dell'elemento di fluido) come la forza peso $dF = g \, dm = g \, \rho \, dV$

-forze di superficie, agenti sulla superficie infinitesima dell'elemento di fluido.

In generale si definisce pressione p il rapporto tra una forza agente su una superficie infinitesima e la superficie stessa:

$$p = dF/dS$$

-Ne segue che la forza di superficie e' data da : $dF = p \, dS$.

-La pressione in un fluido non e' direzionale, ma e' una quantita' scalare. Tale proprieta' segue dal principio di solidificazione ovvero dallo stato meccanico di quiete di una parte qualunque del fluido.

- L'unita' di misura della pressione e' $1 \, \text{Pa} = 1 \, \text{N/m}^2$

- Un suo multiplo importante e' $1 \, \text{bar} = 10^5 \, \text{Pa}$

- La pressione atmosferica $1 \, \text{atm} = 1,01325 \, \text{bar}$

Equilibrio nei fluidi

Per studiare come può variare la pressione all'interno di un fluido si deve imporre che il fluido sia in quiete. Ovvero tutte le parti del fluido non subiscono spostamenti, hanno velocità ed accelerazione nulle.

Allora la risultante delle forze di volume e di superficie è nulla:

$$\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = 0$$

Le forze di superficie agenti in una direzione sono due, per le due facce dell'unità di volume:

$$F_S = p(z)dS - p(z+dz)dS = - (dp/dz) dzdS = - (dp/dz) dV$$

Le forze di volume sono date da:

$$F_V = f_z \rho dV$$

dove f è la forza per unità di massa agente in direzione z .

Allora la condizione di equilibrio insegna:

$$(dp/dz) = f_z \rho$$

ed analogamente per le altre componenti:

$$(dp/dx) = f_x \rho \qquad (dp/dy) = f_y \rho$$

Equilibrio nei fluidi: la legge di Stevino

Nel caso in cui agisca la forza di volume data dalla forza peso:

$$f_z = -g \quad f_x = 0 \quad f_y = 0$$

allora la condizione di equilibrio diventa:

$$(dp/dz) = -g \rho \quad (dp/dx) = 0 \quad (dp/dy) = 0$$

e per la pressione si ha che:

$p(x) = \text{costante}$, $p(y) = \text{costante}$

$$p(z) = p(z_0) - g \rho (z - z_0)$$

La pressione è costante lungo le superfici orizzontali (dette isobariche) e varia linearmente con la quota.

Se consideriamo il liquido in un contenitore, sia p_0 la pressione agente sulla superficie limite del liquido ($z_0 = 0$ $p(z_0) = p_0$).

Alla profondità $z = -h$ la pressione è data da:

$$p(h) = p_0 + g \rho h$$

Questa è la legge di Stevino: la pressione in un liquido a densità costante cresce linearmente con la profondità.

Inoltre sulle superfici a pari pressione la densità deve essere costante: la superficie libera di un liquido in quiete deve essere orizzontale.

Il principio di Pascal

Nei punti della superficie libera di un fluido in un contenitore sottoposto alla forza peso, la pressione e' pari a quella esterna ed assume in tutti i punti lo stesso valore.

Dunque se la pressione esterna varia la pressione interna variera' secondo la relazione:

$$p = p(h) = p_{\text{ext}} + \rho g h = p_{\text{ext}} + \Delta p$$

La relazione $p = p_{\text{ext}} + \Delta p$ e' detta principio di Pascal.

Stabilisce che ogni cambiamento di pressione esterna su un fluido, si distribuisce in ogni punto del fluido.

Applicando la legge di Stevino ai punti di un fluido posti alla stessa profondita' si deduce il **principio dei vasi comunicanti**:
il liquido assume in vari recipienti comunicanti ed aperti allo stesso ambiente lo stesso livello rispetto al suolo.

Il barometro di Torricelli

Torricelli fu il primo a sostenere che l'atmosfera esercita una pressione e fu il primo a misurarne il valore.

Lo strumento fu un barometro a mercurio: il peso della colonna di mercurio in un ramo chiuso (e sopra il quale era presente il vuoto) su un recipiente aperto determina una pressione sul fluido, controbilanciata dalla pressione dell'atmosfera.

L'altezza della colonna di mercurio fornisce l'equivalente della pressione atmosferica: $p_0 = \rho g h$

Nel suo esperimento Torricelli osservò che la colonna di mercurio nelle condizioni di equilibrio si innalza di 760 mm.

Dal valore della densità del mercurio $\rho = 13.596 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$
segue che $p_0 = 13.596 \times 9.8 \times 0.760 \text{ Pa} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$

Il principio di Archimede

Consideriamo un fluido sottoposto alla gravita', ed isoliamone idealmente un volume finito V di forma qualsiasi.

La risultante delle forze di pressione esercitate sulla parte isolata dal resto del fluido e' uguale ed opposta alla forza peso esercitata dal volume del fluido isolato.

$$F_v + F_s = 0 \quad \text{ma} \quad F_v = mg = -\rho Vg \quad \text{dunque} \quad F_s = \rho Vg \mathbf{z}$$

Se ora sostituiamo al volume V un volume identico di una altra sostanza qualsiasi, la risultante delle forze di superficie e' la stessa, ma le forze di volume cambiano con la densita' ρ' della sostanza. Non vi e' piu' una condizione di equilibrio. La forza risultante e' pari a:

$$F_v' + F_s = (-\rho' Vg + \rho Vg) \mathbf{z} = (\rho - \rho') Vg \mathbf{z}$$

Se $\rho' > \rho$ allora la forza ha la stessa direzione di g (ovvero diretta verso il basso) ed il corpo introdotto scende nel fluido.

Se $\rho' < \rho$ allora la forza ha direzione opposta a quella di g (ovvero diretta verso l'alto) ed il corpo introdotto sale nel fluido.

In entambi i casi: il corpo riceve un spinta verso l'alto pari a F_s ovvero pari al peso del fluido spostato. Principio di Archimede Tale spinta e' applicata al centro di massa del fluido spostato.

Se il corpo ha il baricentro spostato la spinta di Archimede puo' esercitare un momento.

Moto in un fluido: fluidi ideali

Quando si verifica una situazione di scorrimento tra due elementi di fluido compare tra essi una forza tangenziale detta di **attrito interno**, con verso sempre opposto alla **velocita' relativa** dei due fluidi.

Le forze esercitate da due elementi tangenti, l'uno sull' altro, sono uguali ed opposte. Questa forza di attrito fa si che nei fluidi ideali la **velocita'** di scorrimento sia massima al cntro di un condotto e diminuisca progressivamente fino ad uno strato limite di contatto con le pareti del condotto.

Si chiama fluido ideale il fluido per il quale l'attrito interno e' nullo ed il fluido e' incompressibile.

Dunque se la densita' e' costante, una parte del fluido assumerà sempre lo stesso volume, anche se in moto rispetto ad altre parti del fluido.

Regime stazionario

Consideriamo un fluido in moto (ad esempio in un condotto) possiamo studiarne le caratteristiche del moto

- seguendo il moto di un particolare elemento del fluido sottoposto alle forze risultanti agenti (descrizione Lagrangiana),
- fissando l'attenzione su un determinato punto P della massa fluida e studiando la velocità v che un elemento di fluido che passa nel punto P considerato assume in funzione del tempo (descrizione Euleriana)
- Nel caso della descrizione Euleriana consideriamo il caso in cui la velocità, pur cambiando da punto a punto, sia in ciascun punto indipendente dal tempo. Questa situazione fisica è detta di regime stazionario. (In caso contrario si parla di regime variabile.)
- Le linee che in ogni punto hanno direzione tangente alla velocità sono dette linee di corrente. Esse sono costanti in regime stazionario. Le linee di flusso che passano attraverso una sezione formano un tubo di flusso.

Portata

Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima ortogonale alle linee di corrente. Il prodotto

$$v \, dS = dq$$

e' detto **portata**. Rappresenta tutto il volume del fluido passato attraverso la sezione infinitesima in un secondo.

Se il fluido e' ideale , ovvero incompressibile, la sua densita' e' costante, allora in condizioni di regime stazionario, (in cui le linee di corrente non cambiano) la portata deve essere la stessa in qualunque sezione.

Fissate due qualunque sezioni del tubo, la massa che entra nell'unita' di tempo deve anche uscirne, se il fluido e' incompressibile. Allora:

In regime stazionario se la densita' e' costante, e' costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo: $v \, dS = \text{costante}$

Allora dove la sezione aumenta diminuisce la velocita' mentre se la sezione diminuisce, aumenta la velocita' del tubo di flusso.

Se v_m e' la velocita' media del fluido in una sezione S:

$$v_m S = \text{costante}$$

Il teorema di Bernoulli

La proprietà fondamentale dei fluidi ideali è nota come il Teorema di Bernoulli. Consideriamo un fluido a densità costante che scorre in regime stazionario. Una certa quantità di fluido compreso tra due sezioni si sposta attraverso il tubo di flusso.

Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido alle varie sezioni del condotto.

Nello spostamento l'energia potenziale cambia solo per le parti del fluido che corrispondono ad una variazione globale di quota. Il lavoro della forza peso è pari a:

$$dW_v = -dU = -dm g (z_2 - z_1) = -\rho g (z_2 - z_1) dV$$

Le forze di pressione dovute alle pareti compiono un lavoro nullo, mentre le forze di pressione a monte ed a valle forniscono un lavoro:

$$dW_s = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{x}_1 - \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{x}_2 = p_1 dS_1 dx_1 - p_2 dS_2 dx_2 = -(p_2 - p_1) dV$$

Il lavoro compiuto è pari alla variazione di energia cinetica:

$$dT = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

Il teorema di Bernoulli

Si ottiene allora che:

$$dW_v + dW_s = dT$$

$$-\rho g (z_2 - z_1) dV - (p_2 - p_1) dV = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

separando i termini 1 e 2 si ottiene:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$$

In un fluido ideale in moto in regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia potenziale per unità di volume e della densità di energia cinetica per unità di volume è costante lungo il condotto, ovvero lungo qualunque tubo di flusso.

Si possono calcolare numerosi effetti tramite questo teorema (es teorema di Torricelli)