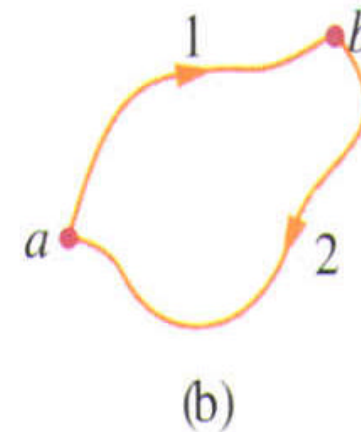


Lavoro ed energia

1. Forze conservative
2. Energia potenziale
3. Conservazione dell'energia meccanica
4. Conservazione dell'energia nel moto del pendolo
5. Esempio: energia potenziale gravitazionale
6. Esempio: energia potenziale elastica
8. Lavoro delle forze non conservative
9. Potenza

Forze Conservative

Le forze per le quali il lavoro eseguito non dipende dal percorso sono chiamate forze conservative. Per il calcolo del lavoro eseguito possiamo utilizzare qualsiasi percorso colleghi il punto iniziale a a quello finale b .



$$L = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_1 = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_2 = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Il lavoro e' esprimibile come differenza dei valori di una funzione nei punti finale ed iniziale della traiettoria.

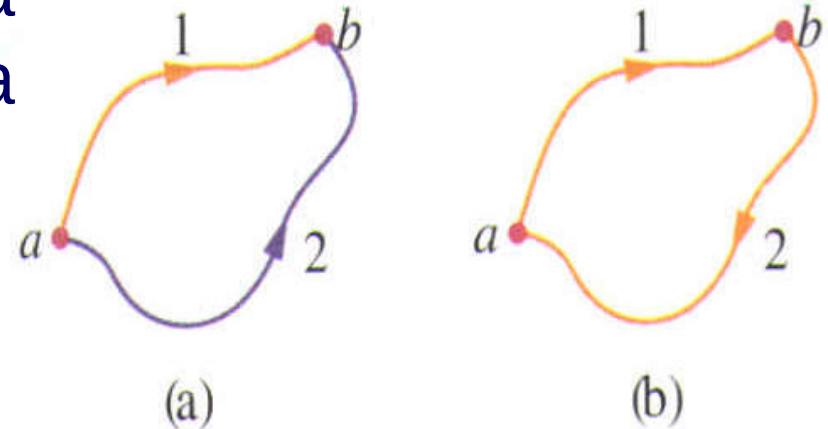
Nel caso in cui si invertano il punto iniziale e finale, ovvero si inverte la direzione di percorrenza della traiettoria, cambia solo il segno del lavoro eseguito.

Un qualunque percorso chiuso puo' essere pensato come la somma di percorso tra di andata tra due punti qualunque della traiettoria ed un percorso di ritorno tra gli stessi punti.

Forze Conservative

Il lavoro compiuto su una traiettoria chiusa da una forza conservativa e' dato da:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_1 + \int_b^a (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_2 = \\ &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_1 - \int_a^b (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_2 = 0 \end{aligned}$$



Il lavoro eseguito da una forza conservativa lungo un qualunque percorso chiuso e' **nullo**.

Questa proprieta' puo essere considerata una definizione equivalente di forza conservativa a quella gia' introdotta.

La funzione delle coordinate tramite cui e' possibile esprimere il lavoro di una forza conservativa si definisce
Energia potenziale

Energia potenziale

Se una forza e' conservativa allora si definisce **energia potenziale** quella funzione **scalare** dello spazio $U(x,y,z) = U(\mathbf{r})$ che soddisfa alla relazione:

$$L = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = + U(\mathbf{r}_a) - U(\mathbf{r}_b) = - \Delta U$$

Ovvero la variazione di energia potenziale tra lo stato iniziale e quello finale ΔU e' pari **all'opposto** del lavoro L eseguito dalla forza conservativa lungo la traiettoria.

Non esiste una forma generale per l'energia potenziale, ma dipende dalla forza conservativa a cui si riferisce.

L'energia potenziale di una forza conservativa **permette di calcolare rapidamente il lavoro** eseguito su qualunque traiettoria.

In particolare ci insegna che da una **forza conservativa non si puo' ricavare lavoro** se il percorso e' chiuso, ovvero, come si dice, **il processo e' ciclico**.

Energia potenziale

A partire dalla definizione osserviamo che:

- 1) Se l'energia potenziale aumenta, il lavoro eseguito e' negativo
Ovvero non si puo' estrarre lavoro dalla forza durante il processo
ma sara' necessario fornire lavoro dall' esterno perche' il
processo sia possibile.
- 2) Se l'energia potenziale diminuisce, il lavoro eseguito e' positivo
e si puo' utilizzare durante il processo.

Dunque l'energia potenziale indica la capacita' della forza di
fornire lavoro.

- 3) Se aggiungiamo (o sottraiamo) una costante c all'energia
potenziale:

$$U' = U + c$$

La nuova espressione per l'energia potenziale soddisfa ancora la
relazione:

$$DU' = U'(r_a) - U'(r_b) = U(r_a) + c - U(r_b) - c = DU = -L$$

Si dice che l'energia potenziale e' definita a meno di una costante
additiva

Conservazione dell'energia meccanica

Per il lavoro delle forze conservative valgono allora due relazioni:

1) Teorema dell'energia cinetica:

$$L = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2 = T_f - T_i$$

2) Definizione di energia potenziale:

$$L = U_i - U_f$$

Uguagliando le due relazioni:

$$L = T_f - T_i = U_i - U_f$$

Ma allora si ha anche che:

$$U_i + T_i = T_f + U_f$$

Cioe' la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto che si muove sotto l'azione di forze conservative **resta costante** durante tutto il moto:

$$E = U + T = \text{costante}$$

Questo e' il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Energia totale e forza peso

Abbiamo visto che nel caso della forza peso

$$L = -mgz_f + mgz_i = -\Delta U$$

Poniamo:

$$U = mgz$$

Ed otteniamo che nel caso della caduta di un grave si conserva l'energia totale data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{costante}$$

Ad esempio consideriamo un corpo che scivola su un piano inclinato privo di attrito. La reazione vincolare e' sempre perpendicolare alla traiettoria e non compie lavoro. Se il corpo parte da fermo da un'altezza h, arrivera' alla fine del piano con velocita' tale che:

$$E = mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

Da cui:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Indipendentemente dalla massa del corpo e dall'inclinazione del piano. Nel moto l'energia potenziale si e' trasformata in energia cinetica.

Energia totale e forza peso

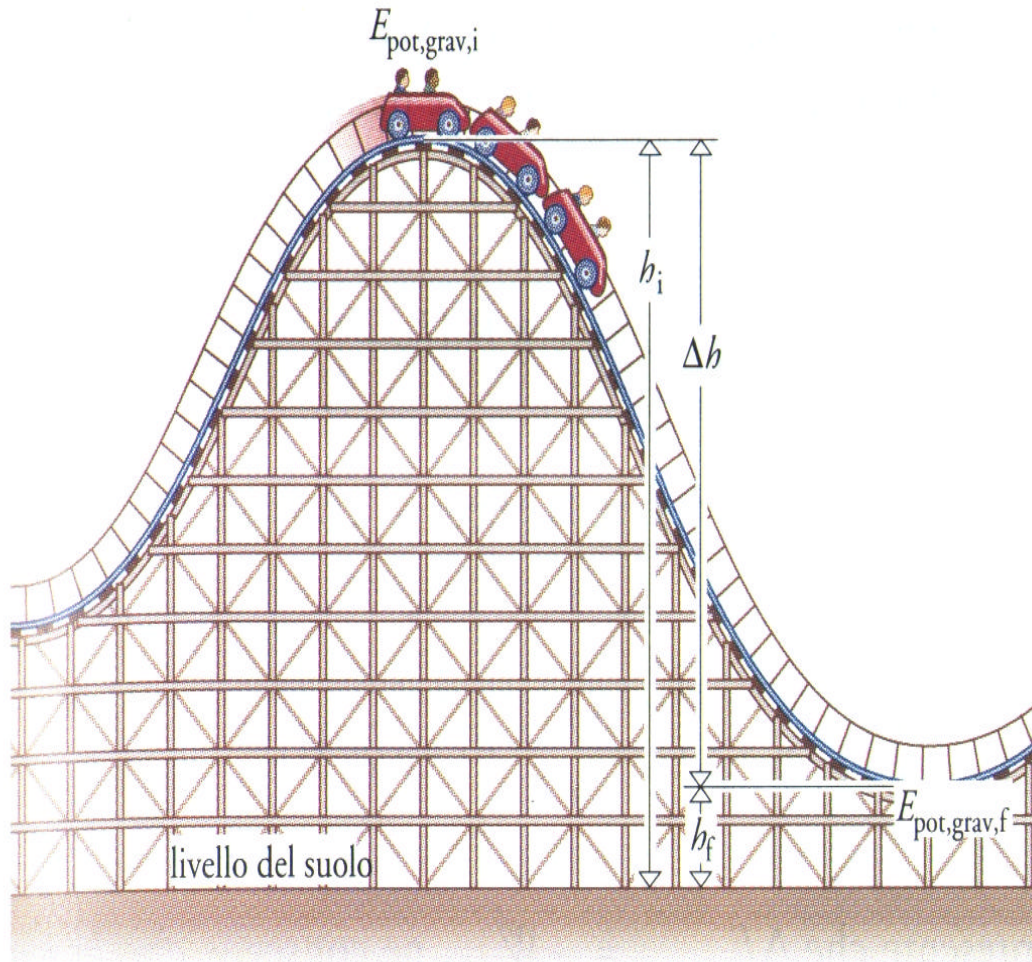
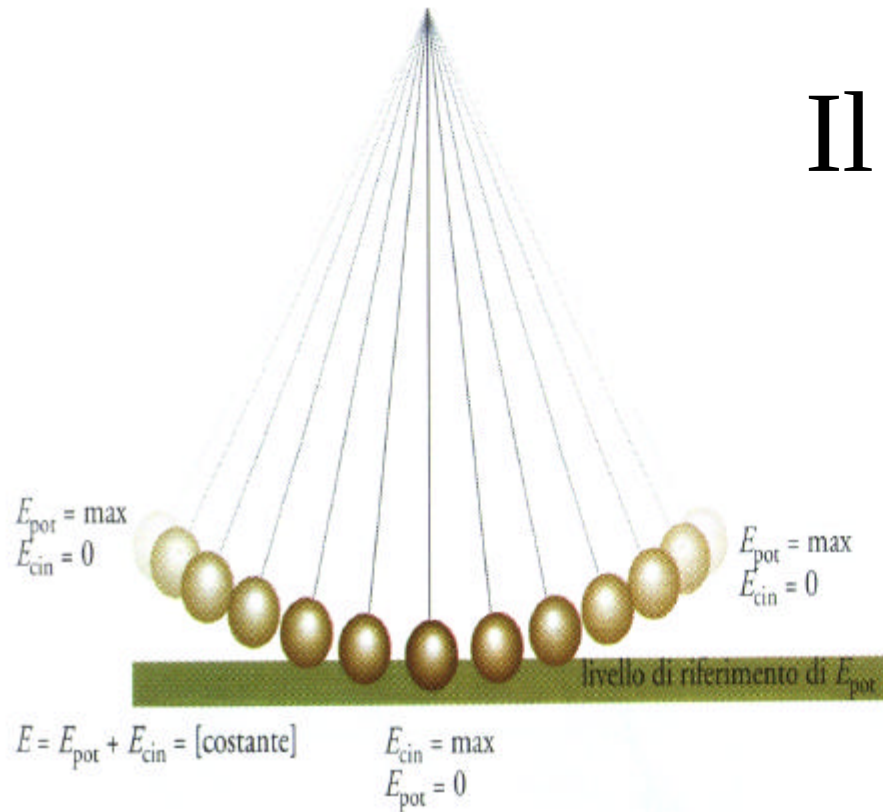


Figura 9.13. Montagne russe che mostrano un carrello alla sua quota più alta, dove l'energia potenziale è $E_{\text{pot,grav,i}}$. Il livello zero dell'energia potenziale gravitazionale è arbitrario. Quando il carrello scende alla quota più bassa, ha un'energia $E_{\text{pot,grav,f}}$. Se $E_{\text{pot,grav,i}}$ è posta uguale a zero, $E_{\text{pot,grav}}$ in un punto qualsiasi del pendio è negativa; perciò, $E_{\text{pot,grav,f}} = -mg \Delta h$.

Il pendolo



Anche nel caso del pendolo la tensione del filo non compie lavoro. Allora il lavoro è compiuto solo dalla forza peso.

$$L = -mgz_f + mgz_i = -\Delta U$$

Scegliamo come riferimento per le quote la quota minima.

Durante l'oscillazione si conserva l'energia totale data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{costante}$$

Tale relazione è sempre vera: anche nel caso di grandi oscillazioni. Nella posizione di massima altezza:

$$E = U = mgL(1 - \cos\theta_{\text{max}}) \quad (T=0)$$

Nel punto più basso:

$$E = T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (U=0)$$

Dunque la velocità nel punto più basso è data da:

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_{\text{max}})}$$

Energia gravitazionale

Nel caso della forza gravitazionale

$$L = \int \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l} = \int F_g \cos \theta \, dl$$

Poiche':

$$\cos \theta = -\cos \varphi \quad \text{e} \quad dr = dl \cos \varphi$$

Si ha che:

$$L = \int_{P_i}^{P_f} F_g \cos \theta \, dl = - \int_{r_i}^{r_f} F_g(r) \, dr = - \int_{r_i}^{r_f} mMG/r^2 \, dr = mMG/r_f - mMG/r_i$$

Poniamo:

$$U(r) = -mMG/r$$

Ed otteniamo che nel caso della forza di gravitazione universale il lavoro e' dato da:

$$L = -\Delta U$$

L'energia potenziale dipende solo dal modulo della distanza tra i due corpi

E si conserva l'energia totale :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mMG/r = \text{costante}$$

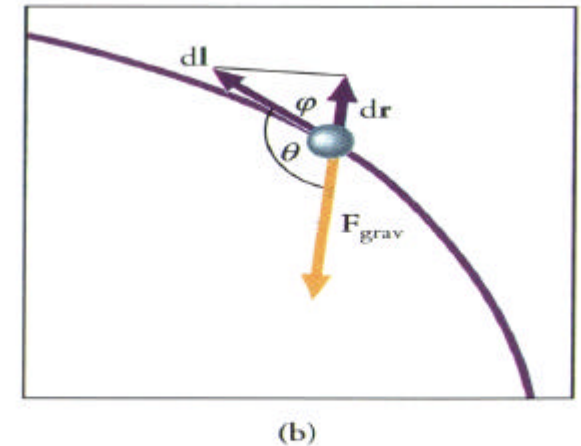
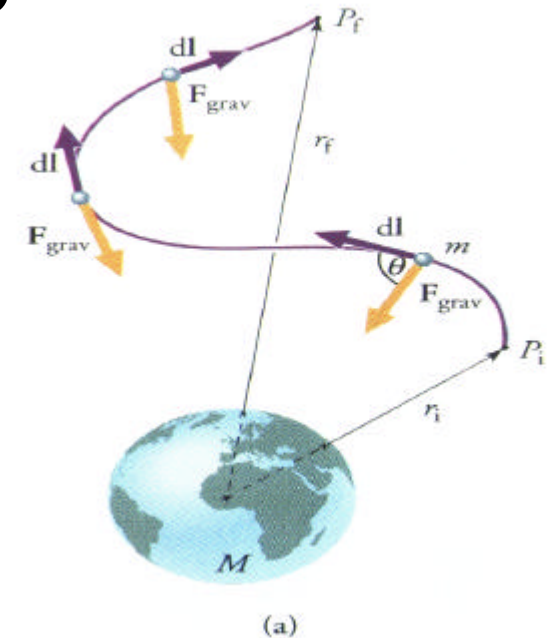


Figura 9.14. Una massa m spostata dal punto P_i al punto P_f nel campo gravitazionale della massa M . (b) «Vista ravvicinata» della geometria.

Energia potenziale elastica

Nel caso di una forza elastica abbiamo visto che:

$$L = -\frac{1}{2}k x_f^2 + \frac{1}{2}k x_i^2$$

Se poniamo

$$U = \frac{1}{2}k x^2$$

Otteniamo che nel caso di una forza elastica si conserva l'energia meccanica data dalla somma:

$$E = \frac{1}{2}k x^2 + \frac{1}{2}m v^2$$

Quando la molla e' compressa oppure dilatata aumenta l'energia potenziale (con x) e diminuisce l'energia cinetica, ovvero la velocita' del corpo, fino al limite di massima compressione o dilatazione in cui $U = \max = E$ e $T = 0$. (La molla compie lavoro resistente)

Quando la molla torna verso la sua posizione di riposo l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica: U diminuisce e T aumenta finche' nella posizione $x=0$ si ha $T = \max = E$ e $U = 0$.

(La molla compie lavoro) In tale posizione la velocita' e' massima.

Il lavoro totale compiuto durante una oscillazione e' nullo .

Lavoro delle forze non conservative

Nel caso in cui agiscano forze non conservative, quali la forza d'attrito, non si può definire una energia potenziale, il lavoro dipende dalla traiettoria, ma è sempre valido il

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA.

$$L = \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Se agiscono contemporaneamente forze conservative e forze non conservative allora:

$$L = \int_i^f \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} + \int_i^f \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{s} = U_i - U_f + \int_i^f \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{s} = T_f - T_i$$

Che si può riscrivere:

$$L_{nc} = \int_i^f \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{s} = T_f - T_i - (U_i - U_f) = T_f + U_f - (T_i + U_i)$$

$$L_{nc} = E_f - E_i$$

Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica

Potenza

Il lavoro compiuto nell'unita' di tempo e' definito **Potenza**

$$P = dL/dt$$

Si misura in Watt:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg m}^2\text{s}^{-3}$$

La potenza sviluppata da una forza su un punto materiale si puo' esprimere:

$$P = dL/dt = (\int d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})/dt = \int d\mathbf{F} \cdot (d\mathbf{s}/dt) = \int d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Se l'angolo tra $\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$ e' minore di $\pi/2$ la potenza e' **positiva**. Altrimenti se l'angolo e' compreso tra $\pi/2$ e π la forza esegue un lavoro resistente e la potenza e' **negativa**.