

Vettori e scalari

Nello studio della meccanica si incontrano due principali categorie di grandezze: **scalari e vettori**.

Cosa distingue queste quantità?

“Domenica sono andato in bicicletta per **due ore...**”

L'informazione sul tempo è completa?

Il tempo è un esempio di quantità **scalare**: è sufficiente un numero e la rispettiva unità per caratterizzarlo completamente.

Vettori e scalari

Altri esempi di quantita' scalari:

- massa
- energia
- lavoro
- potenza
- temperatura assoluta

Vettori e scalari

Esistono quantita' piu' complesse, che non possono essere descritte in termini di un numero:

“Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta...”

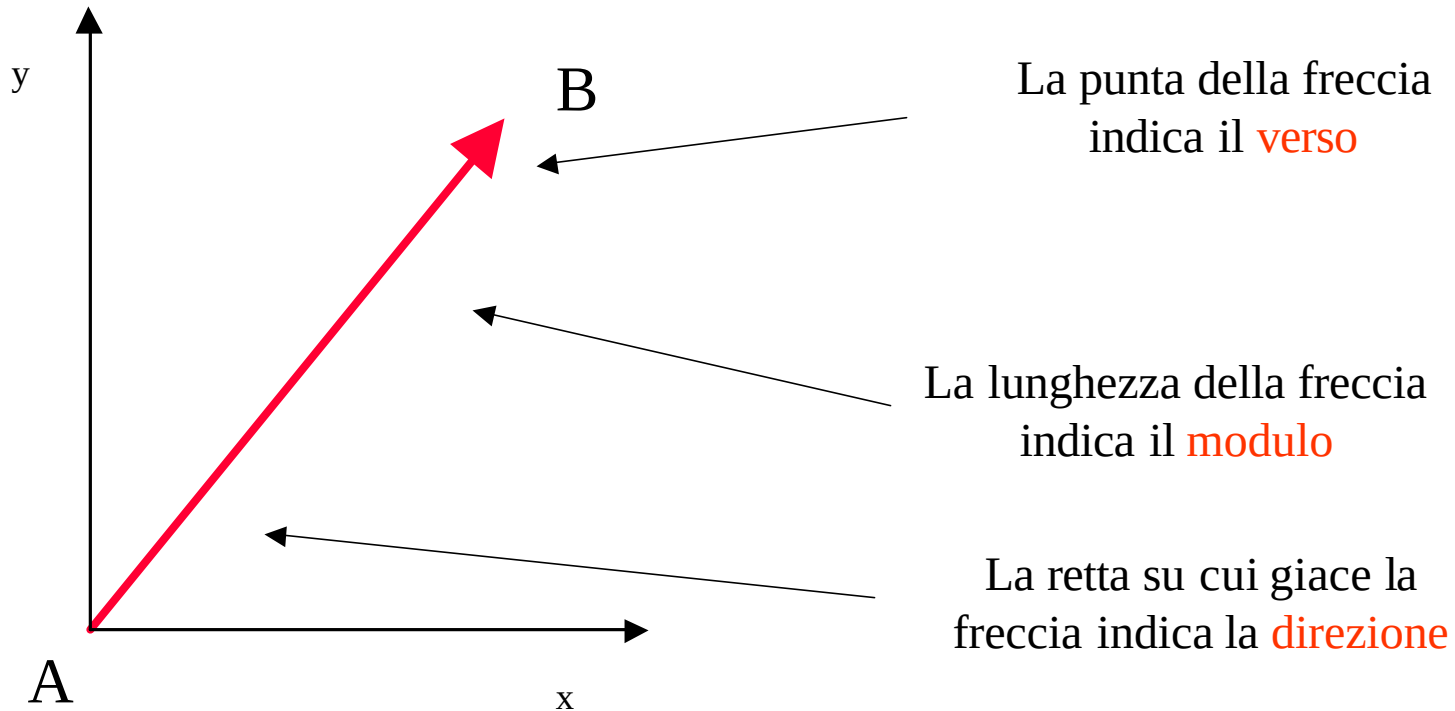
L' informazione sul mio spostamento e' completa?

“Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d' Adige...” $\Rightarrow$ ho aggiunto informazione sulla mia direzione

“Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d' Adige verso Trento” $\Rightarrow$ questo dato completa l' informazione sul mio spostamento.

Vettori e scalari

Un vettore può essere rappresentato da una freccia



Vettori e scalari

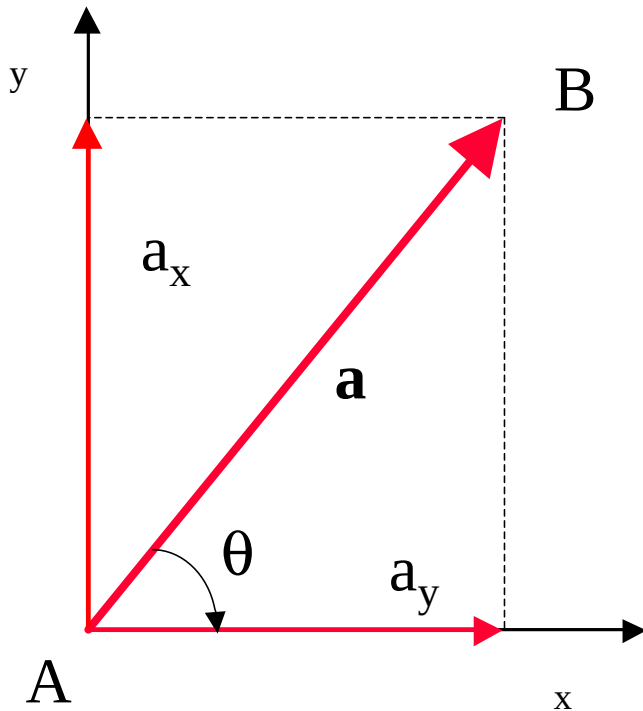
Come indichiamo un vettore ?

- Con una lettera in grassetto : **a**
- Con una lettera e una freccia : $\vec{a}$
- Con gli estremi e una freccia : $\overrightarrow{AB}$

ATTENZIONE! Un vettore va sempre contraddistinto da un simbolo “speciale”. Il simbolo **a** riferito al vettore **a** indica il **modulo** del vettore

Vettori e scalari

Il vettore puo' essere individuato anche tramite le sue **componenti** lungo un sistema di assi cartesiani



Il modulo del vettore puo' essere espresso in funzione delle componenti:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

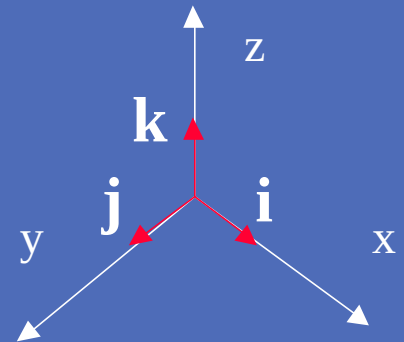
Anche l' angolo θ puo' essere espresso in funzione delle componenti:

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Versori

Esistono dei vettori speciali, detti **versori**, che possono essere utilizzati per caratterizzare tutti gli altri vettori. I versori hanno queste caratteristiche:

- Hanno modulo 1;
- Sono diretti lungo gli assi cartesiani;
- Indicano il verso positivo degli assi cartesiani.

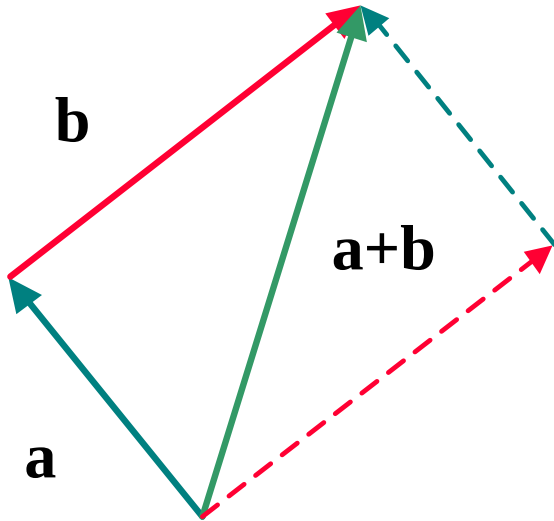


Un qualunque vettore puo' essere espresso per mezzo delle sue componenti e dei versori **i**, **j** e **k**.

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Operazioni con vettori

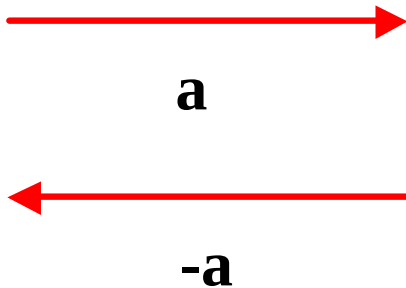
Somma di vettori



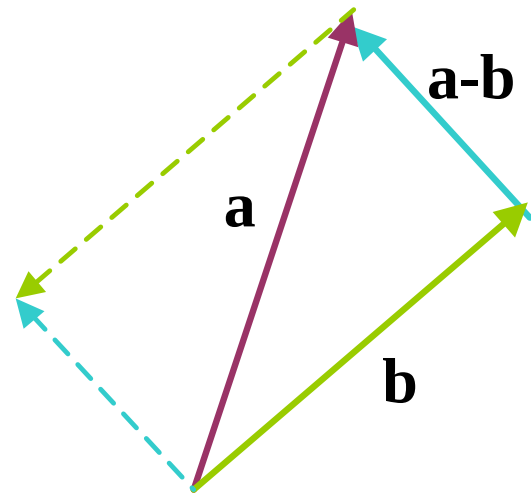
Regola del parallelogrammo

Operazioni con vettori

Differenza di vettori



Il segno – davanti a un vettore ne mantiene direzione e modulo, e ne inverte il verso



Operazioni con vettori

Somma per componenti

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

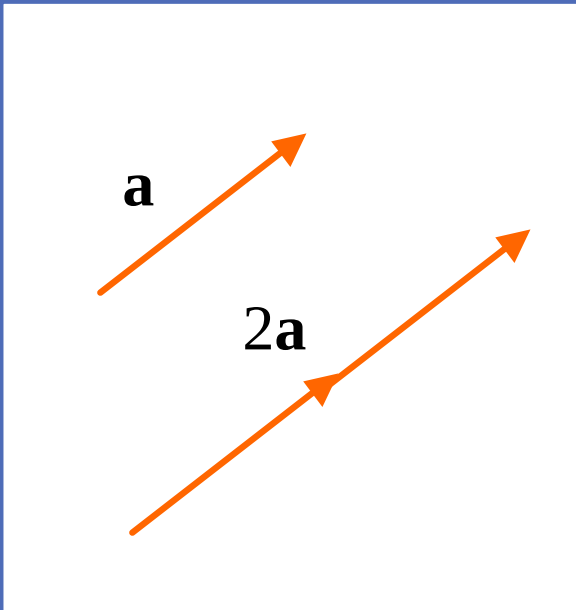
$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}$$

Le componenti della somma di due vettori sono uguali alla somma delle rispettive componenti dei vettori addendi.

Operazioni con vettori

Prodotto di un vettore per uno scalare



$$c\mathbf{a} = ca_x\mathbf{i} + ca_y\mathbf{j} + ca_z\mathbf{k}$$

Per moltiplicare un vettore per uno scalare c si moltiplica per c ciascuna componente

Operazioni con vettori

Esercizio

Dati i vettori :

$$\mathbf{a} = 4.2m\mathbf{i} - 1.6m\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = -1.6m\mathbf{i} + 2.9m\mathbf{j}$$

$$\mathbf{c} = -3.7m\mathbf{j}$$

trovare il vettore $\mathbf{r}$ che rappresenta la somma di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

I tre vettori hanno componenti solo nel piano xy . Possiamo quindi calcolare le sue componenti di $\mathbf{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = (4.2 - 1.6 + 0)m = 2.6m$$

$$r_y = a_y + b_y + c_y = (-1.6 + 2.9 - 3.7)m = -2.4m$$

$$\mathbf{r} = 2.6m\mathbf{i} - 2.4m\mathbf{j}$$

Prodotto di vettori

- Prodotto scalare

il prodotto scalare tra due vettori ha come risultato una grandezza scalare

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \theta$$

$$= a \cos \theta b = b \cos \theta a$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{commutativa}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$$

calcolo con le componenti

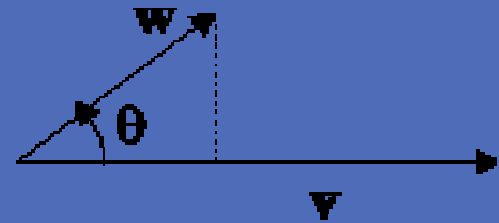
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z) \cdot (b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z) =$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0$$

Non si può definire il prodotto scalare di 3 vettori, non associativa



Prodotto vettoriale

- Prodotto tra due vettori che dà un vettore
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- **Modulo** $c = a b \sin\theta$
- **Direzione** perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
- **verso** avanzamento vite destrorsa, cavatappi, mano destra
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ **anticommutativa**
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
- calcolo con le componenti $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **determinante di matrice**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z) \cdot (b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z) =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$$

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \quad \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x \quad \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$$