

Le leggi di Keplero

Lo studio del moto dei pianeti, tramite accurate misure, permise a **Keplero** tra il 1600 ed il 1620 di formulare le sue **tre leggi**:

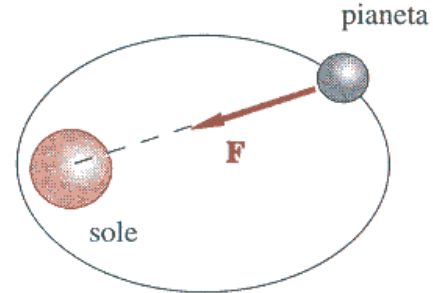
I legge: I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

II Legge: La velocità areale, con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita, e' costante.

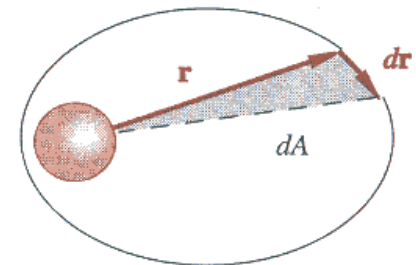
III Legge: Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell' ellisse:

$$T^2 = k r^3$$

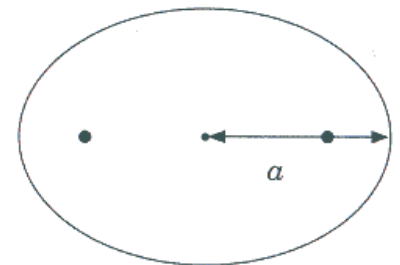
A partire da tali leggi Newton fu in grado di determinare la forza che esprime l'interazione gravitazionale generata dalla presenza di due corpi dotati di massa.



orbita ellittica



$$dA/dt = \text{costante}$$



$$T^2 = k a^3$$

La Forza Gravitazionale

Seguiamo il ragionamento di Newton.

Se in particolare l' **orbita è circolare**, allora il fatto che la velocità areale è costante (il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali) implica che il moto **sia circolare uniforme**.

$$dA/dt = (1/2)r^2 d\theta/dt = \text{costante} = (1/2)r^2 \omega$$

Allora l' unica accelerazione presente e' una accelerazione centripeta:

$$a_c = \omega^2 r$$

e dunque l'unica forza agente e' una forza centripeta:

$$F_c = m \omega^2 r$$

Dove $\omega = 2\pi/T$ implica $F_c = m (2\pi/T)^2 r$

Utilizzando la terza legge di Keplero $T^2 = kr^3$ si ottiene

$$F_c = m (2\pi)^2 r / k r^3 = (4\pi^2/k) m / r^2$$

Ovvero: La forza esercitata dal sole sui pianeti e' inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

La Forza Gravitazionale

Se ora consideriamo il sistema terra-sole allora possiamo dire che la forza che il sole esercita sulla terra è:

$$F_{st} = (4 \pi^2 / kt) m_t / r^2$$

mentre la forza che la terra esercita sul sole sarà della forma:

$$F_{ts} = (4 \pi^2 / ks) m_s / r^2$$

Applichiamo il principio di **azione e reazione**: le forze devono essere uguali in modulo:

$$(4 \pi^2 / kt) m_t / r^2 = (4 \pi^2 / ks) m_s / r^2$$

E dunque: $m_t / kt = m_s / ks$ oppure $m_t ks = m_s kt = \text{costante}$

Se introduciamo la costante:

$$G = 4 \pi^2 / (kt m_s) = 4 \pi^2 / (ks m_t)$$

Otteniamo il modulo della forza terra-sole:

$$F = G m_s m_t / r^2$$

La Forza Gravitazionale

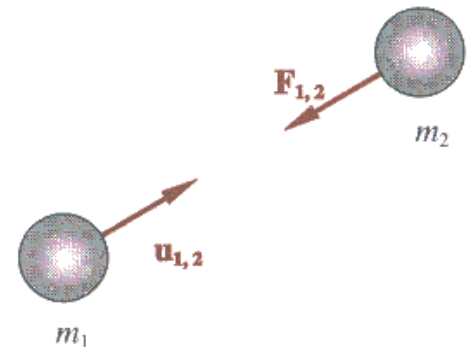
Newton ipotizzò l'esistenza di una formula universale ed enunciò la seguente legge di **Gravitazione Universale**:

Tra due masse qualsiasi di dimensioni trascurabili rispetto alla loro distanza, agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende dal prodotto delle due masse ed inversamente al quadrato della loro distanza.

$$\mathbf{F}_{12} = - G m_1 m_2 / r^2 \hat{\mathbf{r}}_{1,2}$$

La costante di proporzionalità G è detta **costante di gravitazione universale**:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$



Il moto dei satelliti

Consideriamo un satellite che sia in orbita circolare intorno alla terra.

Il suo periodo di rotazione attorno alla terra si può calcolare in base alla sua distanza dalla terra:

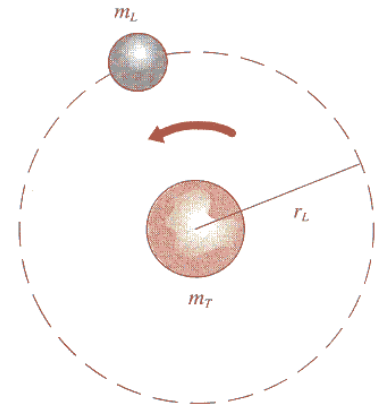
$$F = G m_t m_s / R^2 = m_s \omega^2 R$$

Allora

$$\omega^2 = (2\pi/T)^2 = G m_t / R^3$$
$$T = 2\pi \sqrt{R^3 / (G m_t)}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$T = 3.14 \cdot 10^{-7} \sqrt{R^3} \text{ s}$$



Alla distanza $R = 42300 \text{ km}$ il periodo è pari a $T = 24 \text{ h}$ ovvero il satellite è **geostazionario**.

La legge di Coulomb

Analogamente alla forza agente tra due masse la forza agente tra due cariche è **inversamente proporzionale al quadrato della distanza** e **direttamente proporzionale a ciascuna delle cariche**. La forza è repulsiva se le due cariche hanno lo stesso segno ed attrattiva se le due cariche sono di segno opposto.

$$\mathbf{F}_c = \gamma qQ/r^2 \hat{r}_{12}$$

Osserviamo che contrariamente al caso della forza gravitazionale, si può scegliere una unità di misura per la carica elettrica tale che $\gamma=1$.

$$[q]^2 = [M][L][T]^{-2} [L]^2 \quad \text{dunque} \quad [q] = [M]^{1/2}[L]^{3/2}[T]^{-1}$$

In unità elettrostatiche l'unità di misura della carica è 1 u.e.s. tale che due cariche unitarie si attraggono dalla distanza di 1 cm con la forza di 1 dine.

Nel sistema Internazionale la carica è considerata una grandezza fondamentale e dunque γ è diverso da 1 ed ha dimensioni fisiche.

$$\gamma = 1/4\pi\epsilon = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Il Concetto di Campo

Sia per la forza Gravitazionale che per quella di Coulomb valgono alcune importanti proprietà:

1) Le forze sono godono del **principio di sovrapposizione**, ovvero la forza esercitata su un corpo da più corpi è pari alla **somma delle forze esercitate sul corpo come ciascuno degli altri corpi fosse l'unico presente**.

2) Le forze agiscono a distanza

3) In assenza di altri corpi si può pensare che il singolo corpo generi una **deformazione** dello spazio, detta **campo** che permette di associare ad ogni punto dello spazio **una grandezza vettoriale** pari alla forza che agirebbe su un secondo corpo dotato di massa o carica unitaria.

Allora la forza esercitata dal corpo considerato su un altro corpo è dato dal prodotto del campo (gravitazionale o elettrostatico) rispettivamente per la massa o la carica del secondo corpo.