

# Meccanica dei sistemi

1. 1. Momento angolare
2. Momento di una forza
3. Forze centrali
4. Sistemi di punti materiali
5. Forze esterne e Forze interne
6. Centro di massa di un sistema
7. Conservazione della quantita' di moto
8. Teorema del momento angolare
9. Il sistema di riferimento del centro di massa
10. Teoremi di Konig
11. Il corpo rigido
12. Il momento di inerzia

# Momento angolare

La grandezza fisica associata alle rotazioni, analoga alla quantita' di moto per le traslazioni, e' il vettore **momento angolare  $L$** :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

il momento angolare si misura in  $\text{kg m}^2\text{s}^{-2}$ .

$\mathbf{L}$  e' perpendicolare al piano definito dal vettore quantita' di moto e dal vettore posizione  $\mathbf{r}$ . Il suo modulo e' dato dal prodotto  $r p \sin\theta$ . Osserviamo che il prodotto  $r \sin\theta$  e' la componente di  $\mathbf{r}$  nella direzione perpendicolare a  $\mathbf{p}$ :  $r \sin\theta = r_{\perp}$ . Analogamente il prodotto  $p \sin\theta$  e' la componente di  $\mathbf{p}$  nella direzione ortogonale ad  $\mathbf{r}$ :  $p \sin\theta = p_{\perp}$ .

Dunque possiamo porre:

$$L = |\mathbf{L}| = r p_{\perp} = r_{\perp} p$$

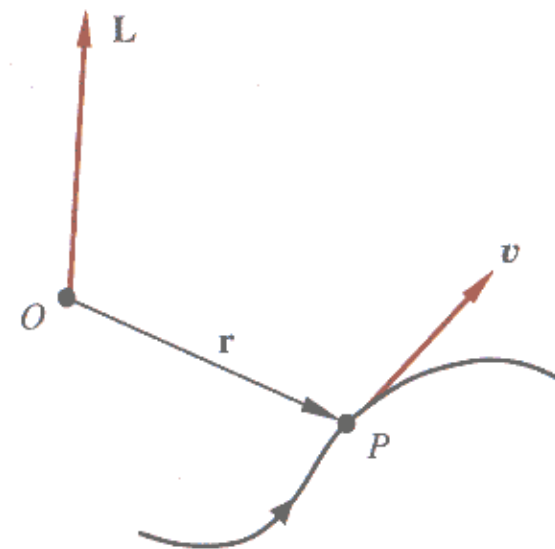
In particolare dunque:

$$L = r p_{\perp} = r m v_{\perp}$$

cioe' contribuisce al momento angolare solo la componente della velocita' perpendicolare al raggio vettore. Nel caso di moto circolare, con centro nell'origine  $v_{\perp} = v = r\omega$ .

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

Momento angolare



# Momento angolare

a)  $\theta = \pi/2$

Nel caso di moto circolare, con centro nell'origine  
 $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} = r\boldsymbol{\omega}$  e dunque:

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

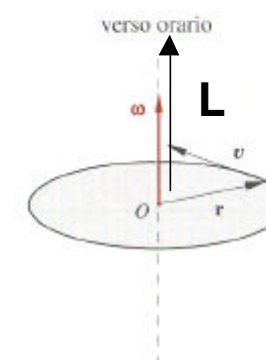
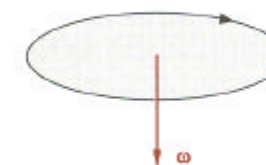
il vettore  $\mathbf{L}$  e' diretto come l'asse di rotazione ed e' parallelo al vettore  $\boldsymbol{\omega}$ . Si puo' introdurre la notazione vettoriale:

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}.$$

a)  $\theta = 0, \pi$

Nel caso in cui il moto e' traslatorio lineare, passante per l'origine,  $\mathbf{r}$  e' sempre parallelo a  $\mathbf{p}$  e non vi e' componente di  $\mathbf{p}$  perpendicolare ad  $\mathbf{r}$  o viceversa. Dunque:

$$\mathbf{L} = 0$$



# Momento di una forza

Definiamo **momento di una forza** il vettore:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

diretto perpendicolarmente al piano formato dal raggio vettore e dalla forza.

Esso e' l'analogo rotazionale della forza.

Consideriamo la variazione nel tempo del momento angolare:

$$d\mathbf{L}/dt = d/dt (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$$

poniamo  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  ed osserviamo che  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Allora:

$$d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$$

Ed otteniamo:

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$$

Ovvero: La variazione nel tempo del momento angolare e' pari al momento della forza applicata. Questa relazione e' l'analogo rotazionale della seconda legge di Newton.

# Forze centrali

Si definisce **forza centrale** una forza definita in ogni punto dello spazio **la cui direzione** passa sempre attraverso **un punto fisso**, detto **centro della forza**.

Se il centro coincide con l'origine di un sistema di riferimento la forza centrale e' diretta parallelamente al raggio vettore.

Esempi di forze centrali sono la **forza gravitazionale** e la **forza di Coulomb**, dirette sempre come la congiungente il corpo di prova dalla sorgente del campo.

Nel caso di forze centrali si ha che

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

Poiche'  $\mathbf{r}$  e' parallelo ad  $\mathbf{F}$ . Dal teorema del momento angolare segue che:

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = 0 \text{ dunque } \mathbf{L} = \text{costante.}$$

Quindi per un corpo sottoposto all'azione di una forza centrale il momento angolare e' una **quantita' conservata**.

Ricordiamo la definizione di **velocita' aerale**: area spazzata nell'unita' di tempo dal vettore  $\mathbf{r}$ :

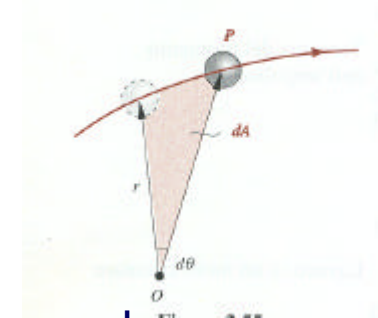
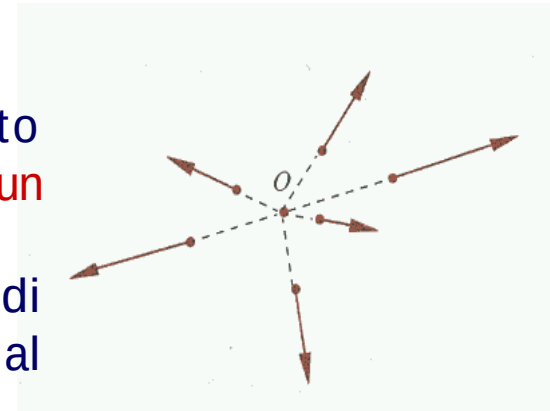
$$dA/dt = \frac{1}{2} r^2 d\theta/dt = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

Ma si ha anche (in modulo):  $L = m r v_{\perp} = m r (r d\theta/dt) = m r^2 \omega$

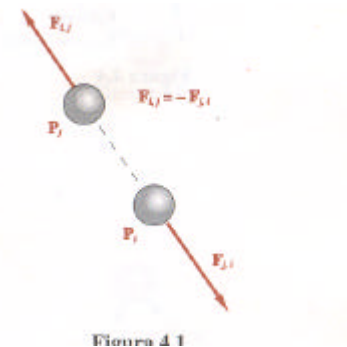
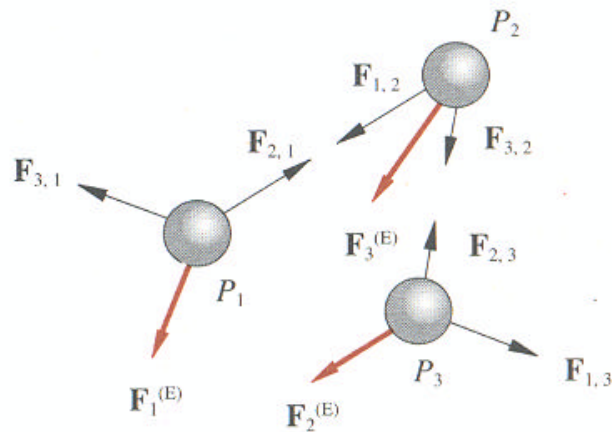
Da cui:

$$dA/dt = \frac{1}{2} L/m = \text{costante}$$

**La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano passante per il centro (poiche' la direzione di  $\mathbf{L}$  costante) ed e' percorsa in modo che la velocita' aerale sia costante (poiche' il modulo di  $\mathbf{L}$  costante) (Keplero)**



# Sistemi di punti. Forze interne ed esterne



Consideriamo un sistema di  $n$  punti materiali, interagenti tra loro e con il resto dell'universo. In generale sul punto  $i$  agiranno forze esercitate dagli altri  $n-1$  punti materiali dette **forze interne  $\mathbf{F}^i$**  e forze esercitate da agenti esterni al sistema, dette **forze esterne  $\mathbf{F}^e$** . La forza agente sul singolo punto  $j$  e' data dalla risultante di tutte le forze agenti:

$$\mathbf{F}_j = \sum_n \mathbf{F}^i + \sum_n \mathbf{F}^e$$

Tale distinzione dipende da come e' definito il sistema.

Per le forze interne vale il principio di azione e reazione: e dunque per ogni forze interna  $\mathbf{F}_{ij}$  esiste un'altra forza interna  $\mathbf{F}_{ji}$  tale che  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ .

Se consideriamo la risultante di tutte le forze agenti su un sistema:

$$\mathbf{R} = \sum_j \mathbf{F}_j = \sum_j (\sum_n \mathbf{F}^i + \sum_n \mathbf{F}^e) = \mathbf{R}^i + \mathbf{R}^e$$

Ma le forze interne si annullano a coppie e dunque  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^e$

Ovvero la risultante delle forze agenti su un sistema e' pari alla risultante delle sole forze esterne

# Sistemi di punti.

In generale, per determinare completamente il sistema, si deve risolvere un sistema di  $3n$  equazioni, se  $n$  sono i punti materiali, del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_j a_{jx} = F_{jx} \\ m_j a_{jy} = F_{jy} \\ m_j a_{jz} = F_{jz} \end{array} \right. \quad j=1,n$$

Definiamo allora per ciascun punto le seguenti grandezze:

|                   |                                                       |                   |                                   |
|-------------------|-------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------|
| Posizione:        | $\mathbf{r}_i$                                        | velocita'         | $\mathbf{v}_i$                    |
| Accelerazione:    | $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$                   | quantita' di moto | $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ |
| Momento Angolare: | $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ | energia cinetica  | $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$     |

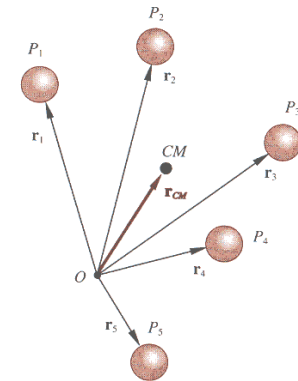
Per il sistema complessivo di punti definiamo inoltre:

|                                      |                                                                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Quantita' di moto totale del sistema | $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$                     |
| Momento angolare totale del sistema  | $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ |
| Energia cinetica totale del sistema  | $T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$                                  |

# Centro di Massa

Si definisce come centro di massa di un sistema di punti materiali il **punto geometrico** la cui posizione e' individuata da raggio vettore:

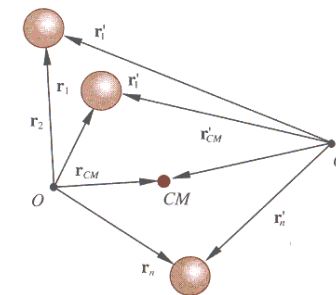
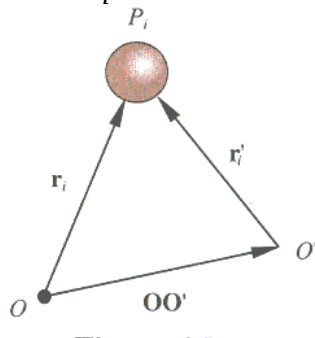
$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + m_4 \vec{r}_4 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_n}$$



Che si puo' esplicitare rispetto alle sue componenti.

La **posizione del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento**, mentre le sue coordinate varieranno con il sistema di riferimento scelto.

$$\vec{R}'_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + o\vec{o}')}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \frac{\sum_i m_i o\vec{o}'}{\sum_i m_i} = \vec{R}_{cm} + o\vec{o}'$$



# Centro di Massa

Se gli  $n$  punti sono in movimento la posizione del centro di massa puo' variare.  
Definiamo allora la **velocita' del centro di massa**

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

Se ricordiamo la definizione di quantita' di moto totale del sistema  $\vec{P}$ ,  
e definiamo la massa totale del sistema :

$$M = \sum_i m_i$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

La **quantita' di moto totale del sistema** e' pari al prodotto della **massa totale** del sistema per la **velocita' del centro di massa**,  
ovvero per la velocita' del punto geometrico identificato da  $\vec{R}_{cm}$

# Centro di Massa

Analogamente si puo' ricavare l'accelerazione del centro di massa

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$

$$m_i \vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ji}^{int} + \sum_j \vec{F}_{ji}^{ext} = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i (\sum_j \vec{F}_{ji}^{int} + \sum_j \vec{F}_{ji}^{ext})}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{R}^{ext}}{M}$$

$$\boxed{\vec{R}^{ext} = M \vec{a}_{cm}}$$

Si ottiene il **Teorema del centro di massa**:

il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema ed a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

# Centro di Massa

Inoltre ricordando le definizioni di velocità del centro di massa e di quantità di moto totale del sistema:

si ottiene che: la **risultante delle forze esterne** è pari alla **derivata della quantità di moto totale del sistema**

$$\vec{R}^{ext} = M\vec{a}_{cm} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{dM\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Osserviamo dunque che il centro di massa e' una **quantita' matematica**, che gode di notevoli proprieta':

- 1) Il moto del centro di massa e' determinato dalle sole **forze esterne**
- 2) La sua velocita' e' pari alla **quantita' di moto totale divisa la massa totale del sistema**
- 3) La sua accelerazione e' pari al rapporto tra la **risultante delle forze esterne e la massa totale del sistema.**

Facendo riferimento a **P** ed **R<sup>ext</sup>** possiamo dire che il centro di massa rappresenta il **moto globale** dell'insieme di punti materiali.

**R<sub>cm</sub> v<sub>cm</sub> a<sub>cm</sub>** sono dati dalle **medie pesate sulle masse** dei vettori posizione velocita' ed accelerazione dei singoli punti e forniscono informazioni sulle **proprieta' medie del moto.**

# Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti è isolato, ovvero non soggetto a forze esterne, allora la risultante  $\mathbf{R}^{\text{ext}}$  è nulla e ne segue:

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = 0 \rightarrow \mathbf{a}_{\text{cm}} = 0 \rightarrow \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{costante} \rightarrow \mathbf{P} = \text{costante}$$

## PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo ed il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme oppure resta in quiete.

È un principio di portata generale che segue dalla omogeneità dello spazio, ovvero che non esiste una origine privilegiata per i sistemi di riferimento.

Gli urti tra punti materiali obbediscono sempre alla legge di conservazione della quantità di moto.

# Teorema del momento angolare

Consideriamo ora le variazioni del momento angolare totale del sistema:

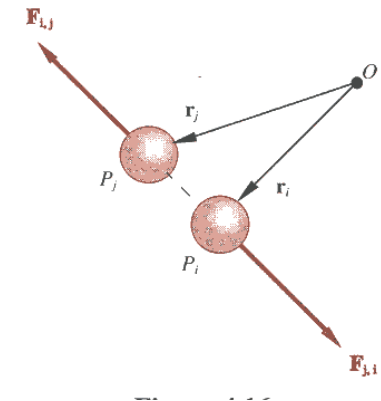
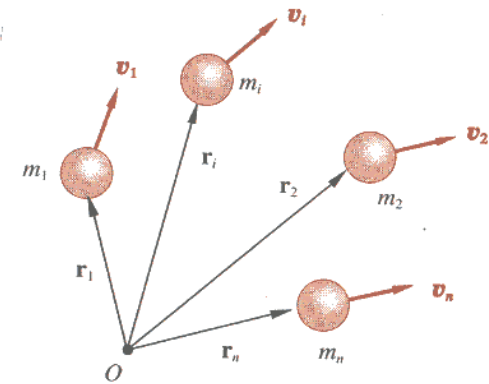
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i)}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Se l'origine rispetto alla quale sono definiti i raggi vettore posizione (detta polo) e' in quiete oppure coincide con il centro di massa del sistema, allora il primo termine e' nullo e si puo' porre:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} \equiv \sum_i \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}) \\ &= \vec{M}^{\text{int}} + \vec{M}^{\text{ext}} \end{aligned}$$

Il vettore  $\vec{M}^{\text{int}}$  e' dato dalla somma dei momenti delle forze interne, che a due a due si annullano. Dunque

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$$



# Conservazione del momento angolare

Se il polo e' fisso oppure coincide con il centro di massa, allora se il momento delle forze esterne e' nullo, si conserva il momento angolare totale del sistema.

$$\mathbf{M}^{\text{ext}} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{costante}$$

Si possono verificare due casi:

a) Il sistema e' isolato allora  $\mathbf{R}^{\text{ext}}=0$  e il momento delle forze esterne e' nullo rispetto a qualunque scelta del polo.

b) Il sistema non e' isolato il momento delle forze esterne puo' essere nullo per una scelta del polo e non nullo rispetto ad un altro polo. Allora si conserva il momento angolare solo se calcolato rispetto al primo polo.

La conservazione del momento angolare di un sistema di punti isolato e' conseguenza della isotropia dello spazio (non esiste una direzione privilegiata nello spazio).

## Il sistema di riferimento del centro di massa

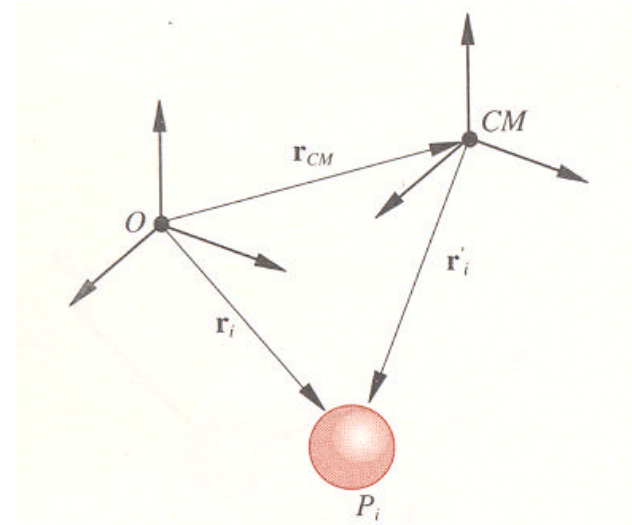
Se scegliamo come **origine** del sistema di riferimento utilizzato per descrivere il moto, il **centro di massa del sistema** in esame, il riferimento in generale **non e' un riferimento inerziale**, ma gode di importanti proprieta':

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}$$

Dal teorema di composizione delle velocita', in assenza di moto rotatorio:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{cm}$$

Ma nel riferimento del centro di massa:



$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = 0 \quad \vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} = 0 \quad \vec{P} = 0$$

La quantita' di moto totale del sistema e' sempre nulla se misurata nel riferimento del centro di massa.