

Richiami di onde

Durante il corso di fisica avete visto che le onde possono dividersi in

- Onde meccaniche (come quelle del mare, le onde sismiche, le onde sonore) caratterizzate dalla necessità di un mezzo per la propagazione. Tali onde seguono le leggi di Newton.
- Onde elettromagnetiche, descritte dalle leggi di Maxwell, che si propagano anche nel vuoto e che, nel vuoto, viaggiano con $v = c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Onde ‘corpuscolari’ (di materia) che descrivano il comportamento ondulatorio delle particelle.

In queste pagine ci soffermeremo sulle onde meccaniche.

Onde trasversali e longitudinali

L’aggettivo “trasversale” o “longitudinale” si riferisce al moto dei singoli costituenti del moto ondulatorio (‘elementi’) rispetto al moto di propagazione dell’onda. Vediamo due esempi.

Si pensi di prendere un capo di una corda e di inchiodare l’altro capo al muro. Muovendo su e giù il capo che abbiamo in mano potremo osservare sulla corda:

Un impulso viene trasmesso tra consecutivi elementi (infinitesimi) della corda. Infatti l’impulso si propaga lungo la corda in quanto l’elemento di corda che teniamo in mano “tira e sposta” il successivo elemento, che, a sua volta, “tira e sposta” quello ancora successivo e così via.

È la tensione della corda che permette al processo descritto sopra di verificarsi. Si pensi infatti ad una corda lasca, con una tensione minima. La propagazione dell’impulso è assai più difficile, al limite impossibile.

Se non gli attriti fossero trascurabili (cioè se non si perdesse energia meccanica nella propagazione dell’impulso) e se la nostra mano si muovesse con un andamento sinusoidale, la forma dell’onda sarebbe sinusoidale.

Osservando un punto fisso (.. ‘elemento’..) della corda al passaggio dell’onda (dell’impulso) lo vedremo muoversi con andamento sinusoidale.

Quindi il moto del singolo elemento è quindi trasversale alla corda, e al moto di propagazione dell’onda. Da ciò il nome di “onda trasversale”.

Si pensi ora di agire su un pistone che chiude un tubo pieno di aria. Spostando rapidamente il pistone avanti (ed indietro) questa spinta metterà in moto le molecole di aria vicine al pistone che a loro volta comprimeranno (ed espanderanno) le molecole successive ... e così via. Cioè il moto si propaga ad elementi successivi di aria nell’stessa

direzione in cui avviene il movimento ondulatorio degli elementi costituenti l'onda. Il moto viene quindi detto "longitudinale".

È molto importante osservare che a viaggiare è solo l'onda e NON la materia. Si pensi ad una piscina dove viene fatto cadere un sasso. Delle onde circolari, generate dall'impatto del sasso nell'acqua, si propagano in tutte le direzioni sulla piscina, a partire dal punto di impatto. Le onde sono trasversali, infatti i singoli elementi di acqua, al passaggio dell'onda si muovono su e giù, trasversalmente al moto di propagazione dell'onda. Se si appoggiasse in acqua un tappo di sughero, al passaggio dell'onda lo vedremo oscillare su e giù, ma non trasversalmente, indicando in modo visivo che non vi è trasporto di materia lungo la propagazione dell'onda. La stessa cosa si può dire per le onde longitudinali, in questo caso il singolo elemento si muove nella stessa direzione della propagazione dell'onda, ma è un moto oscillante, cioè la posizione media nel tempo rimane invariata e il moto ha una ampiezza trascurabile rispetto al cammino dell'onda. Anche in questo caso non vi è trasporto di materia lungo la propagazione dell'onda.

La descrizione dell'onda

Come possiamo descrivere un'onda? La sua *ampiezza* cioè la distanza degli elementi dell'onda dalla loro posizione di equilibrio, dipenderà da una coordinata spaziale (che individua l'elemento) e da una coordinata temporale. Cioè abbiamo necessità di una funzione del tipo:

$$y = f(x, t)$$

Se restringiamo il nostro interesse ad onde *sinusoidali* la relazione scritta sopra può scriversi:

$$(1) \quad y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

↑ ampiezza
↑ spostamento
↑ Termine oscillatorio

Dove k è il *numero d'onda angolare*, ω la *pulsazione* o *frequenza angolare*. Il termine tra parentesi

$$(2) \quad \Phi = kx - \omega t$$

viene detto "fase dell'onda". Come si vede l'equazione che descrive l'onda ha due variabili indipendenti (x e t), e quindi non è possibile descriverla con un semplice grafico. Possiamo però considerare le variabili una alla volta, fissando l'altra.

Tempo fissato ($t = t_l$).

In questo caso è come "fotografare l'onda in un determinato istante t_l . Nella fase il termine ωt_l è una costante:

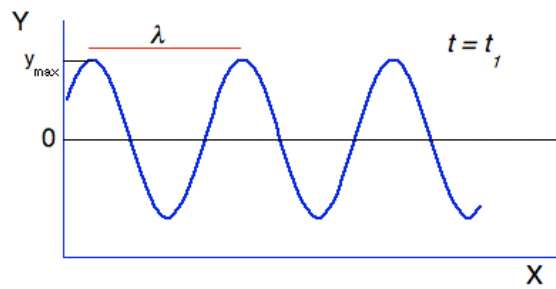


Figura 1

Nella figura il massimo valore di y (y_{max}) è l'ampiezza dell'onda y_0 . Lasciando scorrere il tempo l'onda scorre lungo l'asse delle x ; ad un tempo successivo $t_2 > t_1$, ad esempio:

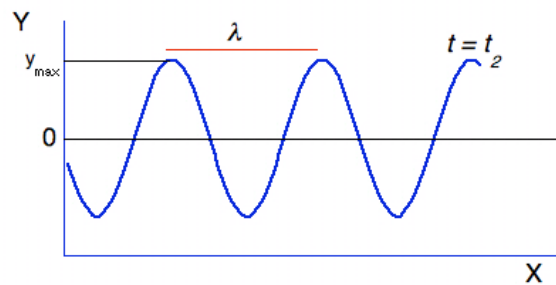


Figura 2

Si osservi ora l'onda fissando la coordinata x ($x = x_1$). In questo caso stiamo fissando un unico elemento (.. punto ..) dell'onda, e il suo moto nel tempo:

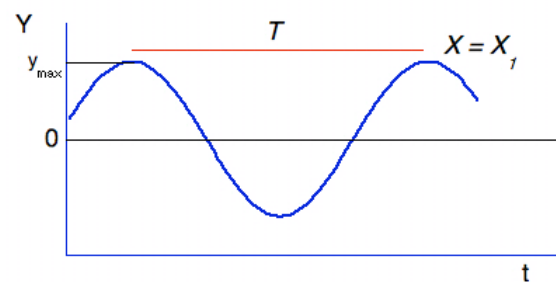


Figura 3

Si noti che nel caso precedente (Figure 1 e 2) il grafico rappresenta in un certo senso una vera e propria foto: la forma dell'onda è proprio la forma della corda che oscilla in un determinato istante, in quest'ultimo caso, invece non stiamo vedendo la forma dell'onda ma il moto di un particolare punto della corda.

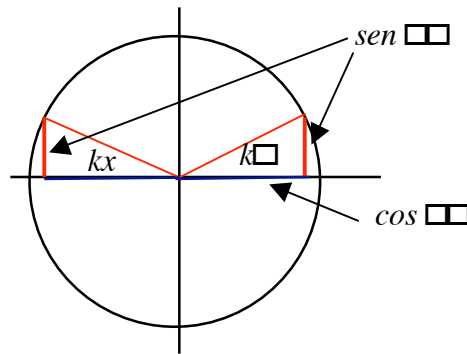
La lunghezza d'onda, il numero d'onda e il numero d'onda angolare

Definiamo ora alcuni parametri essenziali per la descrizione di un'onda. Consideriamo il primo caso descritto sopra (vedi Figure 1 e 2) in cui $t = t_1$. La lunghezza d'onda (λ) è la distanza dopo la quale la forma dell'onda si ripete. In termini più precisi è la minima distanza fra due punti della forma d'onda aventi la stessa ordinata y e la stessa derivata dy/dt .

Imponendo la stessa y , e considerando per semplicità, e senza perdita di generalità, $t_1 = 0$:

$$(3) \quad y(x, 0) = y_0 \sin kx = y_0 \sin k(x + \lambda) = y_0 \sin(kx + k\lambda)$$

Qual è il $k\lambda$ più piccolo affinché la (3) sia verificata? Osserviamo il cerchio trigonometrico:



Vediamo che

$$\sin(kx) = \sin(\pi - kx) = \sin(2\pi + kx) = \sin(3\pi - kx) = ..$$

cioè

$$(4) \quad k\lambda = \pi - 2kx, 2\pi, 3\pi - 2kx \dots$$

Imponendo la stessa derivata si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [y_0 \sin kx] = ky_0 \cos kx = ky_0 \cos(kx + k\lambda)$$

guardando il cerchio trigonometrico si ha:

$$\cos(kx) = \cos(2\pi - kx) = \cos(2\pi + kx) = \cos(4\pi - kx) = ..$$

cioè

$$(5) \quad k\lambda = 2\pi - 2kx, 2\pi, 4\pi - 2kx \dots$$

Vediamo che il valore più piccolo di $k\lambda$ che soddisfa sia (4) che la (5) è 2π , cioè:

$$(6) \quad k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = 2\pi/k$$

$$(7) \quad k = 2\pi/\lambda$$

k viene chiamato *numero d'onda angolare*. Il *numero d'onda* K è definito come:

$$(8) \quad K = k/2\pi = 1/\lambda$$

Il *numero d'onda* è quindi il numero di onde in una unità di lunghezza. Le unità sono:

$$(9) \quad [k] = \text{rad L}^{-1} \quad (\text{rad m}^{-1})$$

$$(10) \quad [K] = \text{L}^{-1} \quad (\text{m}^{-1})$$

Periodo, pulsazione e frequenza

Consideriamo ora il caso con x fissato (Figura 3), con $x_l = 0$.

$$(11) \quad y(0,t) = y_0 \sin(-\omega t) = -y_0 \sin(\omega t)$$

Analogamente a prima definiamo *periodo* T il periodo dopo il quale il moto si ripete, cioè l'intervallo di tempo più breve tra due istanti con uguale ordinata y e derivata dy/dt .

Imponendo la stessa y :

$$(12) \quad y(0,t) = y_0 \sin(-\omega t) = -y_0 \sin(\omega t + \omega T)$$

procedendo come fatto prima questo implica:

$$\omega T = \pi - 2\omega t, 2\pi, 3\pi - 2\omega t \dots$$

e imponendo la stessa derivata:

$$\frac{dy}{dt} = -\omega y_0 \cos \omega t = -\omega y_0 \cos \omega(t + T)$$

quindi:

$$\omega T = 2\pi - 2\omega t, 2\pi, 4\pi - 2\omega t \dots$$

In conclusione:

$$\omega T = 2\pi$$

$$(14) \quad T = 2\pi/\omega$$

$$(15) \quad \omega = 2\pi/T$$

Dove si ω è la *pulsazione* o *frequenza angolare*.

La frequenza è definita come

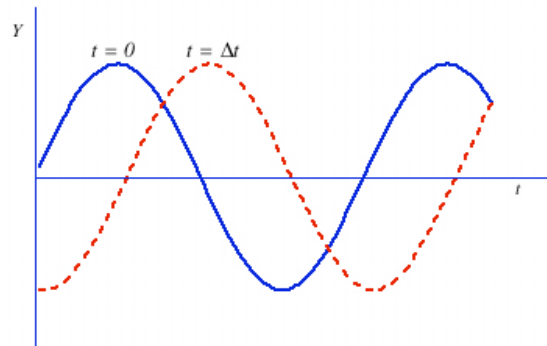
$$(16) \quad f = \omega/2\pi = 1/T$$

Cioè la frequenza è il numero di oscillazioni nell'unità di tempo. Potremo quindi scrivere:

$$(17) \quad y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) = y_0 \sin 2\pi(Kx - ft)$$

Velocità di propagazione dell'onda

Si osservi il grafico di due onde sovrapposte:



Ciascun punto della forma d'onda mantiene una y costante (è come se l'onda si muovesse rigidamente). Attenzione: non sono gli elementi fisici a muoversi (gli elementi della corda, ad esempio)!

Durante il moto essendo y costante deve rimanere costante l'argomento del seno in (17):

$$(18) \quad kx - \omega t = \text{cost}$$

Affinchè la (18) sia verificata, all'aumentare di t deve aumentare anche x . Si vede quindi che la scelta del segno meno, per'altro arbitraria, definisce il verso della *propagazione* dell'onda. Nel caso descritto dalla (17) e (18), cioè con il segno meno si parla quindi di onda *progressiva*.

Per calcolare la velocità di propagazione dell'onda si può derivare la (18) rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$(19) \quad v \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Cioè l'onda percorre una distanza pari ad una lunghezza d'onda ogni periodo. Ovviamente un'onda che viaggia nel verso delle $x < 0$ ha una fase pari a

$$(20) \quad kx + \omega t = \text{cost}$$

Cioè l'equazione d'onda di una onda che viaggia verso le x decrescenti è:

$$(21) \quad y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

e la sua velocità di propagazione è (annullando la derivata come prima):

$$(22) \quad v \equiv -\frac{\omega}{k} = -\frac{\lambda}{T} = -\lambda f$$

In generale quindi si potrà scrivere

$$(23) \quad y(x,t) = f(kx \pm \omega t)$$

che rappresenta una generica onda unidimensionale in movimento. Si può dimostrare che tutte le onde in movimento hanno la forma (23) {si dimostri che $y = \sqrt{ax + bt}$ è un'onda in movimento, mentre $y = \sin(ax^2 - bt)$ non lo è}.

Si noti che la velocità di propagazione dell'onda e la velocità dell'elemento di massa dell'onda sono due cose ben diverse. Quest'ultima è infatti la derivata della (23)

$$(24) \quad u \equiv \frac{dy}{dt} = \pm \omega y_0 \cos(kx \pm \omega t)$$

La velocità di propagazione definita dalla (19) deve dipendere dalle proprietà del mezzo. L'onda infatti deve far oscillare le particelle (elementi) del mezzo. Il mezzo deve quindi possedere inerzia (legata alla variazione di energia cinetica) e elasticità (legata alla variazione di potenziale). Assumendo note queste due caratteristiche del corpo dovrebbe essere possibile calcolare v .

Il calcolo di v

Assumiamo, per semplicità, di generare sulla nostra corda un solo impulso. Osserviamo la corda ad una x costante. La corda ci sembrerà viaggiare, ad esempio da destra a sinistra, con velocità v .

Si osservi la piccola massa di corda lunga dl al massimo dello spostamento rispetto all'equilibrio (y_0). In una prima approssimazione possiamo descrivere la corda su sl come un'arco di circonferenza, come descritto in figura 5.

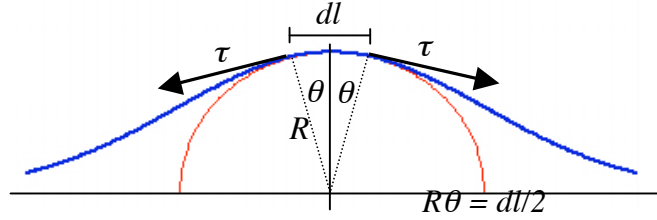


Figura 5

La componente trasversale della tensione τ si annulla. Quella verticale fa muovere la massetta lungo y . L'intensità della forza risultante è quindi data dalla sola componente verticale delle due τ .

$$(25) \quad F_{ris} = 2\tau \sin \theta \approx 2\tau \theta = \tau dl / R$$

La massa del segmento dl è data da:

$$(26) \quad dm = \mu dl$$

dove μ è la densità lineare della corda.

Rispetto al nostro sistema di riferimento con x fisso, e considerando la semplificazione fatta prima la nostra massa dm si muove per un angolo infinitesimo lungo la circonferenza di raggio R (vedi figura 5). In questo caso potremo dire che ha una accelerazione centripeta

$$(27) \quad a_c = v^2 / R$$

dove la v è proprio la velocità che cerchiamo.

Dalla seconda legge di Newton, usando le (25), (26) e (27) otteniamo:

$$F_{ris} = \tau dl / R = dm a = \mu dl v^2 / R$$

Cioè

$$\tau = \mu v^2$$

$$(28) \quad v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

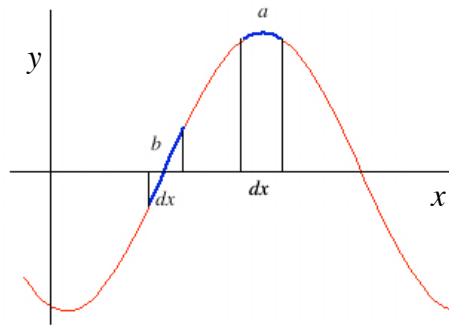
Si noti che la (28) ci dice che la v non dipende dalla frequenza dell'onda ma solo dalla tensione (più la corda è tesa più l'onda si propaga velocemente) e dalla densità lineare (l'onda si propaga più velocemente se è meno densa).

Fin'ora abbiamo definito: y k ω K f λ T τ m v u .

Energia e potenza di un'onda in moto (caso della corda)

Quando facciamo oscillare la corda forniamo energia. Questa energia si propaga con l'onda come energia cinetica e potenziale. Questo è abbastanza intuitivo. Se si genera un singolo impulso ad un'estremità della corda, e si osserva un elemento della corda lontano da tale estremità, questo è inizialmente in quiete. Al passare dell'impulso inizia a muoversi (quindi c'è una energia cinetica) con un moto in qualche modo elastico (l'elemento si allontana dalla posizione di equilibrio, quindi viene richiamato verso di essa) e questo ci fa capire che è anche presente una energia potenziale (elastica in questo caso). Prima l'elemento non si muoveva, ora si muove. L'energia per fare ciò è stata trasportata dall'onda.

Come visto l'energia cinetica è quella associata al moto dell'elemento di massa della corda (moto trasversale). Questa energia viene man mano trasferita agli elementi successivi. L'energia potenziale è, invece, quella associata all'allungarsi ed accorciarsi degli elementi della corda necessari per far oscillare gli elementi della corda stessa.



Si noti che a parità di dx si ha $b > a > dx$. Questo significa che la massima energia potenziale si ha per $y \approx 0$. Per lo stesso valore di y si ottiene la massima energia cinetica! Viceversa per valori di y massimi (massimo spostamento), si ha energia cinetica nulla (l'elemento raggiunge il massimo spostamento e torna indietro, al massimo spostamento $v = 0$) ed energia potenziale minima, al limite nulla ($a \approx dx$). Conseguentemente gli elementi in cui la corda ha massimo spostamento hanno energia nulla, quelli in cui la corda è vicina alla posizione di equilibrio ($y \approx 0$) hanno energia massima.

Quando facciamo oscillare una corda forniamo a questa dell'energia che man mano si trasferisce a x maggiori (se l'onda ha $v > 0$): l'onda trasferisce energia lungo la corda.