

Esercizio di Meccanica 1

Una moneta è posta su un disco orizzontale scabro che può ruotare attorno a un asse verticale passante per il suo centro. La moneta si trova ad una distanza $d = 25$ cm dal centro. Inizialmente il disco è fermo, e successivamente viene messo in moto. Aumentando la velocità angolare, si osserva che quando essa raggiunge il valore $\omega = 2$ rad/s la moneta comincia a scivolare sul disco.

- 1) Determinare il coefficiente di attrito tra moneta e disco.
- 2) Nella risposta alla domanda precedente, si è trattata implicitamente la moneta come un punto materiale, mentre in realtà essa ha la forma di un dischetto di raggio r . Tenuto conto di questo, discutere se il risultato ottenuto è approssimato per difetto o per eccesso.

Esercizio di Meccanica 2

Su un piano orizzontale privo di attrito è posto un disco omogeneo di massa $M=3$ kg e raggio $R= 12$ cm, sul cui bordo si trova un punto materiale di massa $m=500$ g. Quest'ultimo è fissato al disco tramite un particolare meccanismo a molla. Il sistema è in quiete. Ad un certo istante la molla, inizialmente compressa, viene rilasciata ed il punto materiale viene lanciato via dal disco con velocità $v_0 = 2$ m/s.

- 1) Determinare l'energia cinetica del disco nel caso in cui il punto materiale sia lanciato in direzione radiale, e
- 2) nel caso in cui sia invece lanciato in direzione tangente al disco.
- 3) Dire se i due casi 1) e 2) richiedono la stessa o una diversa compressione della molla, motivando la risposta.

Esercizio di Termodinamica

10 moli di un gas ideale monoatomico sono contenute in un cilindro adiabatico munito di pistone mobile. All'inizio il gas si trova in uno stato di equilibrio alla temperatura T_i , poi esso subisce una compressione reversibile fino a quando la temperatura del sistema risulta raddoppiata.

- 1) Si chiede il rapporto tra volume finale e iniziale del gas.
La stessa trasformazione (compressione reversibile fino a raddoppiare la temperatura iniziale T_i) viene ora ripetuta dopo aver introdotto nel cilindro un blocchetto di piombo ($M=1$ kg, calore specifico $c_{pb}=129$ J/Kg K) in aggiunta alle 10 moli di gas.
- 2) Si chiede il rapporto tra volume finale e iniziale del gas in questo secondo caso.

SOLUZIONI

M1

Lo scivolamento avviene quando la velocità angolare supera il valore per cui la forza centrifuga è equilibrata dalla forza di attrito statico, perché quest'ultima esce dal cono di attrito. In formule:

$$m\omega^2 d = \mu_s mg$$

$$\omega^2 = \frac{\mu_s g}{d}$$

Da qui si ricava:

$$\mu_s = \frac{\omega^2 d}{g} = 0.1$$

Quanto alla seconda domanda, se si considera l'estensione finita della moneta, non tutta la sua massa si trova a distanza d , ed è facile convincersi (con un disegno, tracciando la circonferenza di raggio d) che la frazione di massa a distanza maggiore di d prevale su quella a distanza minore di d . Dunque la forza centrifuga totale sulla moneta è in realtà maggiore di quella valutata con la formula del caso puntiforme. Di conseguenza lo scivolamento della moneta di raggio finito avverrebbe per una velocità angolare più piccola di quella della moneta di raggio infinitesimo. Però nel caso di raggio finito sarebbe piuttosto complicato ricavare una formula che leghi la velocità angolare al coefficiente di attrito. Diciamo che dovremmo far comparire una distanza effettiva dal centro $d^* > d$. Se si utilizza la formula del caso puntiforme (con d al posto di d^* ed il valore sperimentale di ω , appropriato al caso reale di dimensione finita), si sottostima il coefficiente di attrito.

M2

Per rispondere alla prima domanda è sufficiente ricorrere alla conservazione della quantità di moto (il sistema è isolato), in quanto il problema è unidimensionale e il disco si comporta come un punto materiale:

$$MV_d + mv_0 = 0$$

$$V_d = \frac{1}{3} m/s$$

$$E_K = \frac{1}{2} MV_d^2 = \frac{1}{6} J \approx 0.167 J$$

Nel caso 2) invece il disco trasla e ruota. L'energia cinetica di traslazione è la stessa del caso precedente. Quella di rotazione richiede di conoscere la velocità angolare del disco, che si ottiene dalla conservazione del momento angolare (rispetto al centro del disco):

$$I\omega + mv_0 R = 0$$

$$\omega = \frac{2mv_0}{MR} \approx 5.56 \text{ rad/s}$$

L'energia cinetica di rotazione e quella totale sono rispettivamente:

$$E_K^{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega^2 \approx 0.333 J$$

$$E_K^{tot} = 0.167 + 0.333 = 0.5 J$$

Nel secondo caso viene messa in gioco più energia cinetica, dunque la molla deve essere più compressa.

T

Nel primo caso basta applicare l'equazione delle adiabatich reversibili

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

con $\gamma = 5/3$ e $T_f/T_i = 2$.

Si ottiene $V_f/V_i = 0.353$.

Nel secondo caso occorre tener conto che l'adiabatica reversibile è isoentropica e porre uguale a zero la variazione totale di entropia del sistema gas+piombo.

$$\Delta S_{gas} + \Delta S_{pb} = 0$$

$$\Delta S_{gas} = n c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i} = n R \left(\frac{3}{2} \ln 2 + \ln \frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$\Delta S_{pb} = M c_{pb} \ln \frac{T_f}{T_i} = M c_{pb} \ln 2$$

In definitiva si ha l'equazione:

$$n R \left(\frac{3}{2} \ln 2 + \ln \frac{V_f}{V_i} \right) + M c_{pb} \ln 2 = 0$$

In cui l'unica incognita è V_f/V_i .

Si ottiene:

$$n R \left(\frac{3}{2} \ln 2 + \ln \frac{V_f}{V_i} \right) + M c_{pb} \ln 2 = 0$$

$$\ln \frac{V_f}{V_i} = - \frac{M c_{pb} \ln 2}{n R} - \frac{3}{2} \ln 2 = -1.076 - 1.039 = -2.116$$

Da cui il risultato: $V_f/V_i = 0.12$.

NOTA: era possibile arrivare allo stesso risultato (e con le stesse formule!) applicando il primo principio. Infatti, in forma differenziale:

$$dU = -dW$$

$$(n c_v + M c) dT = -n R T \frac{dV}{V}$$

da cui, in forma integrale:

$$(n c_v + M c) \ln \frac{T_f}{T_i} = -n R T \ln \frac{V_f}{V_i}$$

che è la stessa formula ottenuta mediante l'entropia ($c_v = 3/2 R$).