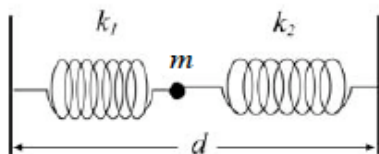


Esercizio di Meccanica 1

Un punto materiale di massa $m=1.3$ Kg e' posto tra due molle orizzontali i cui estremi liberi sono vincolati a pareti rigide poste a distanza $d=1$ m (vedi figura). Il punto materiale poggia su un piano, pure orizzontale, privo di attrito. Le molle hanno costanti elastiche $k_1=40$ N/m e $k_2=25$ N/m e lunghezze a riposo $l_{01}=20$ cm e $l_{02}=30$ cm, rispettivamente. Si chiede:

- 1) Di quanto si allungano le molle all'equilibrio?
- 2) Se il punto materiale viene spostato dalla posizione di equilibrio e lasciato libero, qual e' il periodo delle oscillazioni?
- 3) Se si toglie il piano di appoggio e si lascia agire la forza di gravita', il punto di equilibrio si sposterà in basso e le molle risulteranno inclinate rispetto all'orizzontale. Quale delle due molle sarà più inclinata? Motivare la risposta.



Esercizio di Meccanica 2

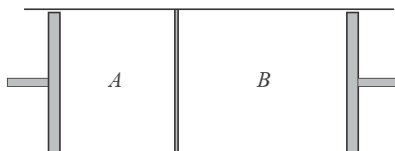
Un proiettile di massa $m = 200$ g viene sparato orizzontalmente con velocità $v = 50$ m/s. Esso colpisce perpendicolarmente l'estremità di una sbarra avente massa $M = 1$ kg e lunghezza l , rimanendovi conficcato. La sbarra può ruotare intorno ad un asse passante per il suo centro e il perno di fissaggio presenta attrito. Si osserva che, dopo l'urto, la sbarra compie 3 giri completi prima di fermarsi. Si chiede:

- 1) Il momento (che si suppone costante) della forza d'attrito.
- 2) Se la sbarra avesse compiuto 12 giri invece di 3, quale sarebbe stata la velocità del proiettile?

Esercizio di Termodinamica

Un gas ideale monoatomico è contenuto in due cilindri A e B separati da una parete fissa diatermica e chiusi da due pistoni mobili (vedi figura). Sia le pareti del cilindro che i pistoni sono fatti di materiale leggero e termicamente isolante. Il numero di moli contenute nel volume B è doppio di quello del volume A . Un dispositivo mantiene i due volumi alla stessa pressione, sia nello stato iniziale di equilibrio, che durante le trasformazioni. Inizialmente la temperatura nei due cilindri è $T_A=300$ K e $T_B=400$ K, rispettivamente. Si chiede:

- 1) la temperatura finale del sistema,
- 2) la variazione di entropia dell'universo, nel caso sia $n_A=1$ mole.



SOLUZIONI

M1

1) All'equilibrio le due forze elastiche sono uguali e contrarie, secondo l'equazione:

$$k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2$$

C'è bisogno di una seconda equazione, per trovare le due incognite Δl_1 e Δl_2 . Essa è data da:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = d - (l_{01} + l_{02})$$

Risolvendo il sistema, si trova:

$$\Delta l_1 = 19.23 \text{ cm e } \Delta l_2 = 30.77 \text{ cm}$$

2) Per uno spostamento del punto dalla posizione d'equilibrio le due molle sono una compressa e l'altra allungata, ma le due forze elastiche agiscono in maniera concorde, cioè sono dirette nello stesso verso. Pertanto il sistema è equivalente ad un'unica molla di costante elastica pari alla somma delle costanti elastiche. Ne risulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{50} \cong 7.07 \text{ rad/s}$$

e quindi il periodo è:

$$T = 2\pi / \omega \cong 0.89 \text{ s}$$

3) In presenza del piano di appoggio le lunghezze delle due molle sono rispettivamente 39 cm e 61 cm, e le forze elastiche, orizzontali, sono pari a circa 7.7 N. Senza il piano di appoggio, le molle dovranno allungarsi di più e inclinarsi, in quanto dovranno fornire in più una forza verticale pari a $mg = 12.74 \text{ N}$. Anche senza fare il conto, è evidente che la prima molla, più corta dell'altra di un fattore 2/3, dovrà inclinarsi maggiormente.

M2

1) L'urto è (completamente) anelastico, quindi l'energia cinetica non si conserva. Però si conserva il momento angolare rispetto al perno centrale (in quanto è nullo il momento della reazione vincolare rispetto a questo punto), e dunque:

$$mv \frac{l}{2} = I\omega$$

dove il momento d'inerzia I è dato da: $I = \frac{1}{12} Ml^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} (\frac{M}{3} + m)$

L'equazione permette di trovare la velocità angolare ω dopo l'urto.

Il momento della forza d'attrito M si trova applicando il teorema lavoro-energia cinetica per il sistema in moto rotatorio:

$$-\frac{1}{2} I \omega^2 = - \int_0^{6\pi} M d\theta$$

Con i dati del problema si trova:

$$M = \frac{1}{12} \frac{I \omega^2}{\pi} = \frac{I m^2 v^2 \frac{l^2}{4}}{12 \pi l^2} = \frac{m^2 v^2 l^2}{12 \pi 4} \frac{1}{\frac{l^2}{4} (\frac{M}{3} + m)} = \frac{m^2 v^2}{12 \pi (\frac{M}{3} + m)} = 4.97 \text{ N/m}$$

Da notare che nella formula finale la lunghezza l della sbarra (che non è conosciuta) non interviene, per cui si può arrivare a conoscere M ma non per esempio I ed ω . È un caso in cui sostituire i valori numerici solo alla fine è non solo consigliabile, ma necessario.

3) Data la struttura della formula risolvete, se il numero di giri fosse 4 volte maggiore, a parità di M , la velocità v dovrebbe essere doppia, cioè 100 m/s.

T

1) La trasformazione consiste nel raggiungimento dell'equilibrio termico tra le due parti del sistema, A e B, inizialmente a temperature diverse. Il sistema è adiabatico, ma lo scambio di calore tra A e B è accompagnato dal compimento di lavoro contro la pressione esterna, costante ma incognita.

Il primo principio si scrive in questo caso come:

$$\Delta U_{A+B} = -W_{A+B} \Rightarrow \Delta U_A + \Delta U_B = -W_A - W_B$$

Cioè, utilizzando l'equazione di stato nella forma $p\Delta V = nR\Delta T$:

$$n_A c_V (T_f - T_A) + n_B c_V (T_f - T_B) = -n_A R(T_f - T_A) - n_B R(T_f - T_B)$$

Questa formula, che esprime il primo principio, si può riscrivere come:

$$n_A c_V (T_f - T_A) + n_A R(T_f - T_A) = -n_B c_V (T_f - T_B) - n_B R(T_f - T_B)$$

cioè, tenuto conto della relazione di Mayer, come:

$$n_A c_P (T_f - T_A) = n_B c_P (T_B - T_f)$$

che è la formula (della calorimetria) che esprime il bilancio dei calori scambiati tra i due gas A e B, come si poteva scrivere direttamente, senza partire dal primo principio.

Tuttavia il considerare il primo principio fa capire che in questo problema il lavoro non interviene. In effetti si può controllare a posteriori che il lavoro totale è nullo, in quanto i due gas compiono lavori uguali e opposti. Ciò è dovuto al fatto che la pressione esterna è mantenuta costante, come nell'espansione di Joule-Thomson, con cui la trasformazione dei due gas A+B ha molto in comune (sono ambedue isoentalpiche).

Dalle formule precedenti si ottiene per la temperatura finale:

$$T_f = \frac{T_A + 2T_B}{3} \cong 366.7K$$

2) Per la trasformazione -a pressione costante- di ciascun gas, la variazione di entropia è data da:

$$\Delta S = n c_P \ln \frac{T_f}{T}$$

Il calcolo, con $n_A=1$ e $n_B=2$, fornisce: $\Delta S_A=4.17$ J/K e $\Delta S_B=-3.62$ J/K.

La variazione totale di entropia del gas, $\Delta S=0.55$ J/K è anche la variazione di entropia dell'universo, dato che il sistema è isolato. Si può notare che questo valore è positivo, e non poteva essere altrimenti dato che la trasformazione è irreversibile.