

Soluzione del compito d'esonero del 14 aprile 2003

Esercizio Numerico

Siamo in presenza di una distribuzione di massa a simmetria sferica. La massa contenuta in una sfera di raggio r è:

$$M(r) = \begin{cases} 4/3\pi\rho r^3 & 0 \leq r < r_1 \\ 4/3\pi\rho r_1^3 & r_1 \leq r < r_2 \\ 4/3\pi\rho (r_1^3 + r^3 - r_2^3) & r_2 \leq r < r_3 \\ 4/3\pi\rho (r_1^3 + r_3^3 - r_2^3) & r \geq r_3 \end{cases}$$

Il campo gravitazionale può essere ricavato facilmente usando il teorema di Gauss:

$$\mathbf{G}(r) = G(r) \hat{\mathbf{r}} = -\gamma \frac{M(r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

essendo γ la costante di gravitazione universale. Sostituendo le espressioni trovate per la massa si ha, quindi:

$$G(r) = \begin{cases} -4/3\pi\rho\gamma r & 0 \leq r < r_1 \\ -4/3\pi\rho\gamma r_1^3/r^2 & r_1 \leq r < r_2 \\ -4/3\pi\rho\gamma (r_1^3 + r^3 - r_2^3)/r^2 & r_2 \leq r < r_3 \\ -4/3\pi\rho\gamma (r_1^3 + r_3^3 - r_2^3)/r^2 & r \geq r_3 \end{cases}$$

Per trovare il potenziale si considera la relazione tra potenziale e campo nel caso di simmetria sferica:

$$V(r_B) = V(r_A) + \int_{r_B}^{r_A} G(r) dr.$$

Applicando quest'ultima formula per $r \geq r_3$ si ottiene

$$V(r) = V_\infty + \int_r^\infty G(r') dr'$$

e V_∞ è nullo per scelta convenzionale. Risolvendo si trova:

$$V(r) = -4/3\pi\rho\gamma \frac{r_1^3 + r_3^3 - r_2^3}{r} \quad (r \geq r_3);$$

inoltre:

$$V(r_3) = -4/3\pi\rho\gamma \frac{r_1^3 + r_3^3 - r_2^3}{r_3}.$$

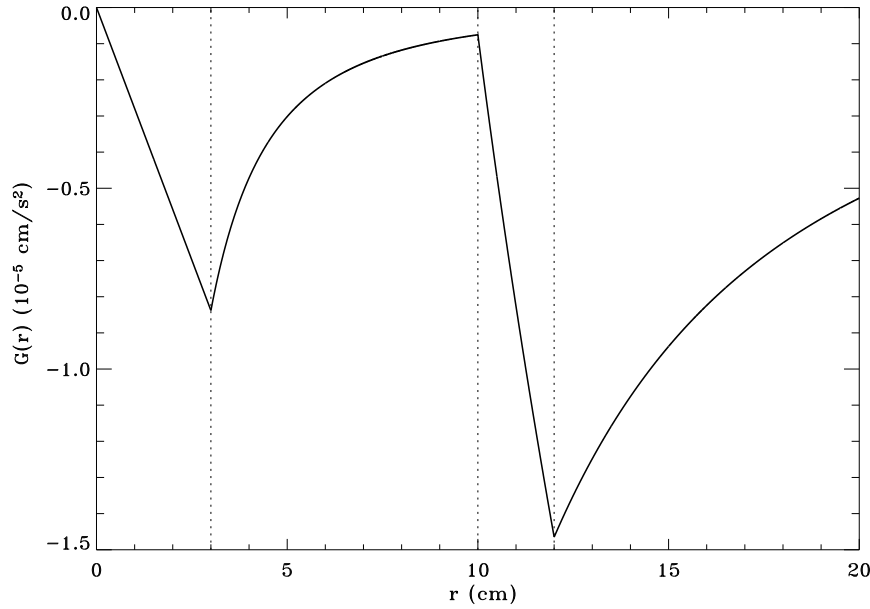
Applicando la stessa procedura all'intervallo $r_2 \leq r < r_3$ si trova:

$$V(r) = V(r_3) + \int_r^{r_3} G(r') dr' = -4/3\pi\rho\gamma \left(\frac{3}{2}r_3^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{r_2^3 - r_1^3}{r} \right),$$

e così per i primi due intervalli. Si noti come l'uso di questa procedura permette di determinare correttamente le costanti di integrazione. In definitiva:

$$V(r) = \begin{cases} -4/3\pi\rho\gamma \left[\frac{3}{2}(r_3^2 - r_2^2 + r_1^2) - \frac{1}{2}r^2 \right] & 0 \leq r < r_1 \\ -4/3\pi\rho\gamma \left[\frac{3}{2}(r_3^2 - r_2^2) + \frac{r_1^3}{r} \right] & r_1 \leq r < r_2 \\ -4/3\pi\rho\gamma \left(\frac{3}{2}r_3^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{r_2^3 - r_1^3}{r} \right) & r_2 \leq r < r_3 \\ -4/3\pi\rho\gamma \frac{r_1^3 + r_3^3 - r_2^3}{r} & r \geq r_3 \end{cases}$$

Gli andamenti del campo e del potenziale sono mostrati in figura.



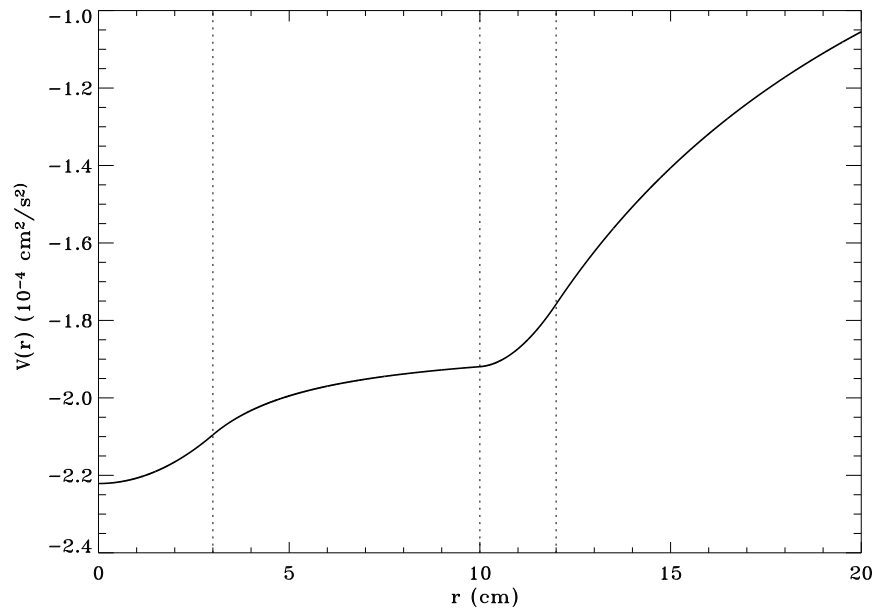
Per $r_4 = 20$ cm si ha $G(r_4) \simeq -5.3 \cdot 10^{-6}$ cm/s² e $V(r_4) \simeq -1.1 \cdot 10^{-4}$ cm²/s².

Domanda 1

L'energia potenziale efficace di un sistema a due corpi è

$$E_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

dove L è il momento angolare del sistema e μ la sua massa ridotta. Nel caso di un potenziale di interazione armonico, E_{eff} è sempre positiva e diverge per $r \rightarrow \infty$; diverge anche per $r \rightarrow 0$ purché sia $L \neq 0$ (in caso contrario il moto si svolge su una retta e l'orbita è degenere). Pertanto si individuano sempre un raggio minimo e un raggio massimo (coincidenti nel minimo di E_{eff}), che sono i due punti in cui E_{eff} è pari al valore dell'energia totale del sistema. Per tutti i valori consentiti dell'energia si hanno dunque solo orbite chiuse, e si può dimostrare che si tratta di ellissi. D'altra parte, è intuitivo che non possano esistere orbite aperte, perché la forza elastica che genera $V(r)$ è attrattiva e cresce con l'aumentare della distanza relativa: non è dunque possibile che le particelle si separino. Si noti quindi che si hanno stati legati di energia positiva,



ma non c'è nessuna contraddizione perché un potenziale armonico non può essere scelto nullo per $r \rightarrow \infty$.

Domanda 2

Il teorema di Bernoulli afferma che su un tubo di flusso di un fluido ideale la somma della densità di energia (cinetica e potenziale) e della pressione si mantiene costante. Nel caso sotto studio, scegliendo un tubo di flusso verticale si vede come la densità di energia potenziale diminuisce con la quota, mentre la pressione non può cambiare perché vincolata al valore della pressione atmosferica esterna al getto. Deve dunque aumentare la velocità. Poiché la portata del fluido è costante, la sezione del getto deve necessariamente diminuire.