

TUTORATO -9 maggio 2011

ESERCIZIO #1 [T.P._din.c.r.#9]

Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza $l=1\text{ m}$ e massa $M=1\text{ Kg}$ e' adagiata, senza vincoli, su un piano orizzontale privo di attrito. Inizialmente l'asta e' in quiete; quindi viene urtata elasticamente da una pallina di massa m , con velocita' v_0 ortogonale all'asta, in un punto distante $d=20,4\text{ cm}$ dal suo centro. Determinare il valore di m affinche' dopo l'urto la pallina si arresti.

[R.: $m=2/3\text{ Kg}$]

ESERCIZIO #2 [T.P._din.c.r.#10]

Un disco omogeneo di massa $M = 4\text{ kg}$ e raggio R e' libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente. Lungo il suo bordo e' avvolto, in modo che non possa slittare, un filo ideale alla cui estremita' e' fissata una massa $m = 2\text{ kg}$. All'istante iniziale il disco e' fermo; quindi viene lasciato libero e la massa m comincia a scendere mettendo in moto il disco. Determinare l'energia cinetica del disco all'istante $t = 2\text{ s}$.

[R.: $E_k=96\text{ J}$]

SOLUZIONI #1 e #2

#1

Si ha conservazione della quantita' di moto, del momento angolare e dell'energia cinetica:

$$mv_0 = Mv_C, \quad mv_0 d = I\omega, \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (1)$$

essendo v_C ed I rispettivamente la velocita' del centro di massa e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a quest'ultimo, avendo tenuto conto che l'asta, dopo l'urto, assume un movimento rototraslatorio.

Tenendo presente la prima e la seconda delle (1), la terza diventa:

$$mv_0^2 = \frac{m^2 v_0^2}{M} + \frac{m^2 v_0^2 d^2}{I}, \quad \Rightarrow \quad m \left(\frac{1}{M} + \frac{d^2}{I} \right) = 1,$$

ed, introducendo il momento d'inerzia della asta $I = Ml^2/12$, si ottiene:

$$m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}.$$

Con i valori numerici dell'esercizio viene $m=2/3\text{ Kg}$.

#2

Detta T l'energia cinetica del disco, per la conservazione dell'energia, si ha

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1)$$

Dalle equazioni cardinali della dinamica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \quad \mathbf{M} = I\frac{d\omega}{dt},$$

detta τ la tensione del filo e proiettando su un asse verticale volto in basso, si ha

$$mg - \tau = ma_C, \quad \tau R = I\frac{d\omega}{dt}. \quad (2)$$

Poiché il filo non slitta $a_C = \dot{\omega}R$; quindi la seconda delle (2) fornisce:

$$\tau = I\frac{a_C}{R^2}.$$

Sostituendo nella prima:

$$mg - I\frac{a_C}{R^2} = ma_C, \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{mg}{m + I/R^2} = \frac{mg}{m + M/2}. \quad (3)$$

Il moto della massa è uniformemente accelerato, dunque la quota h di cui scende e la velocità acquistata sono

$$h = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2, \quad v = a_C t, \quad (4)$$

pertanto, tenuto conto delle (3) e (4), dalla (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= mgh - \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 \\ &= \frac{M}{4}\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 = 96 \text{ J} \end{aligned}$$

In alternativa, la prima delle (3) si può scrivere

$$mg - I\frac{\dot{\omega}R}{R^2} = m\dot{\omega}R, \quad \Rightarrow \quad mgR = \dot{\omega}(mR^2 + I),$$

da cui:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{mR^2 + I}.$$

Integrando,

$$\omega = \frac{mgR}{mR^2 + I}t = \frac{mg}{mR + MR/2}t.$$

Pertanto l'energia cinetica del disco risulta:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M}{4}\frac{m^2g^2}{(m + M/2)^2}t^2 = 96 \text{ J}.$$

ESERCIZIO #3 [Es_M2_28_9_09]

Una sbarretta di massa $M=4\text{Kg}$ e lunghezza $L=1\text{m}$ ha ai suoi estremi A e B due sferette di massa $m_1=2\text{Kg}$ e $m_2=1\text{Kg}$ rispettivamente. La sbarretta e' vincolata a ruotare intorno ad un asse, perpendicolare ad essa, passante per un punto a distanza x dall'estremo A. Si supponga che il vincolo sia privo di attrito.

A partire dalla posizione verticale di equilibrio, l'asta viene leggermente ruotata e poi lasciata libera di oscillare.

1) Calcolare il periodo T delle piccole oscillazioni in funzione di x e 2) determinare per quale valore di x il periodo è minimo, 3) calcolandone il valore numerico.

SOLUZIONE

La coordinata del centro di massa ed il momento d'inerzia della sbarretta rispetto ad una asse passante per il centro di massa x_{CM} valgono rispettivamente :

$$x_{CM} = \frac{ML/2 + m_2L}{m_1 + m_2 + M} = \frac{L(M + 2m_2)}{2(m_1 + m_2 + M)} = 0.43\text{m}$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 + m_1x_{CM}^2 + m_2(L - x_{CM})^2 = 1.03\text{m}^2\text{Kg}$$

Quindi il momento d'inerzia rispetto al punto x vale:

$$I(x) = I_{CM} + (m_1 + m_2 + M)(x_{CM} - x)^2 = I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2$$

L'equazione del moto per piccoli oscillazioni rispetto alla verticale (posso scrivere $\sin\theta \approx \theta$) sarà data dalla seconda equazione cardinale della meccanica :

$$M_{ext} = \frac{dL}{dt} = I(x)\ddot{\theta} \quad \text{dove} \quad M_{ext} \approx M_{tot}g(x_{CM} - x)\theta$$

Sostituendo tutti i termini otteniamo:

$$\ddot{\theta} - \frac{gM_{tot}(x_{CM} - x)}{I(x)}\theta = 0$$

la cui soluzione $\theta(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ descrive un moto armonico di periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I(x)}{M_{tot}g(x_{CM} - x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{M_{tot}g}}\sqrt{\frac{I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2}{x_{CM} - x}}$$

Per determinare il valore di x per cui il periodo è minimo imponiamo che la sua derivata si annulli in tal punto:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{M_{tot}g}}\sqrt{\frac{x_{CM} - x}{I(x)}}\left[\frac{-2M_{tot}(x_{CM} - x)^2 + I_{CM} + M_{tot}(x_{CM} - x)^2}{(x_{CM} - x)^2}\right]$$

tale derivata si annulla per $x = x_{CM}$, ma in tal caso il periodo diventa infinito. Si annulla anche per:

$$x = x_{CM} \pm \sqrt{\frac{I_{CM}}{M_{tot}}} \text{ le cui soluzioni sono } x_1 = 81.4 \text{ cm e } x_2 = 4.6 \text{ cm. L'unica soluzione che ha senso}$$

si ha per $x=x_2$, dove il periodo vale 1.76 sec, mentre per $x=x_1$ si tenta di fare la radice di un numero negativo.