

La Rappresentazione dei dati

Corso di *Fondamenti di Informatica*
(R. BASILI)

Teramo, 4-5 Novembre, 1999

Rappresentazione

- Una rappresentazione si stabilisce tra
 - un oggetto da rappresentare (significato) ed
 - un simbolo (potenzialmente complesso) che lo rappresenta (significante)

Il bimbo che gioca con un sasso lo identifica a seconda della situazione con un'arma o con un'auto

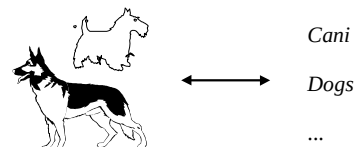
Rappresentazione

- Espressività
- Univocità' (====> *Biettività' !!*)



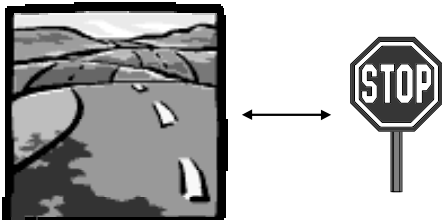
Rappresentazione

- L'Associazione e' Arbitraria



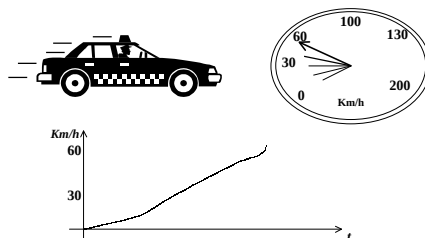
Rappresentazione

- Rappresentazione Iconica



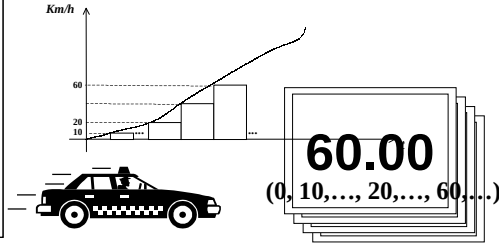
Rappresentazione

- Analogica



Rappresentazione

■ Digitale



Rappresentazione dei dati

■ Dati Numerici

- Numeri Naturali
- Numeri Interi (con segno)
- Numeri Razionali

■ Dati non Numerici

- Testo
- Grafica

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali

- Alfabeto, A
 - Un insieme finito di B simboli, $A = \{a, b, \dots\}$
- Sequenze o Stringhe in A , A^*
 - n -ple, $(a_0, \dots, a_n)$ con $a_i \in A$, ed $n \geq 0$
- Valore, cioè la funzione di rappresentazione:

$$\text{val} : A^* \rightarrow \mathbb{N} \\ \text{data da: } \text{val}((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i B^i$$

B è detta Base

Alfabeti e Stringhe

■ Esempio

$$A = \{a\}$$

$$A^* = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\};$$

oppure:

$$A = \{a, b\}$$

$$A^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, abb, \dots\}$$

Rappresentazione come funzione

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, \dots\}$.

- Una rappresentazione di $\mathbb{N}$ è una funzione iniettiva

$$r : \mathbb{N} \rightarrow A^*$$

- che possiede la funzione inversa (valore)

$$\text{val} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$$

- tale che, data $\sigma \in A^*$,

$$\text{val}(\sigma) = \begin{cases} n \in \mathbb{N} & \text{se } r(n) = \sigma \\ \text{indefinito} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 10

- Alfabeto, $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$
- Sequenze o Stringhe in A , A^*

$$\text{es. } (197) = 197, \quad (1389) = 1389$$

- Valore, $\text{val}((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$

$$\text{es. } \text{val}(197) = 7 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$$

$$\text{val}(1389) = 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 8

- Alfabeto, $A=\{0,1,2,3,\dots,7\}$
- Sequenze o Stringhe in A, A^*

■ es. $(127) = 127$, $(13) = 13$, (183) e' NON VALIDA!!

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 8^i$

es. $val(127) = 7*8^0 + 2*8^1 + 1*8^2 = 7+16+64=87$

$val(13) = 3*8^0 + 1*8^1 = 11$

$$(127)_8 = (87)_{10} \quad (13)_8 = (11)_{10}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 2

- Alfabeto, $A=\{0,1\}$
- Sequenze o Stringhe in A, A^*

■ es. $(101) = 101$, $(10) = 10$, (13) e' NON VALIDA!!

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$

es. $val(101) = 1*2^0 + 0*2^1 + 1*2^2 = 1+4=5$

$val(10) = 0*2^0 + 1*2^1 = 2$

$$(101)_2 = (5)_{10} \quad (10)_2 = (2)_{10}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 16

- Alfabeto, $A=\{0,1,\dots,9,A,B,C,D,E,F\}$
- Sequenze o Stringhe in A, A^*

■ es. $(10E4) = 10E4$, $(1G3)$ e' NON VALIDA!!

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 16^i$

ES. $val(10E4) = 4*16^0 + 14*16^1 + 1*16^3 =$

$= 4 + 224 + 4096 = 4324$

$$(10E4)_{16} = (4324)_{10}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri con la virgola - Base 2

- Alfabeto, $A=\{0,1\}$
- Sequenze o Stringhe in A, A^*

■ es. $(10.1) = 10.1$, (10.3) e' NON VALIDA!!

- Valore, $val((a_{-m}, \dots, a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=-m}^n a_i 2^i$

ES. $val(10.1) = 1*2^{-1} + 0*2^0 + 1*2^1 =$

$= 0.5 + 0 + 2 = 2.5$

$$(10.1)_2 = (2.5)_{10}$$

Rappresentazione Binaria

■ In Base 2.

■ Cifre Binarie o Binary Digits (bits)

■ Cambiamento di base

- $2 \Rightarrow 10$
- $10 \Rightarrow 2$

■ Valori decimali (Virgola fissa)

■ Casi particolari

Rappresentazione Binaria

■ Parole di memoria di dimensione fissa, o rappresentazione su k bit

■ Max e Min numero rappresentabile

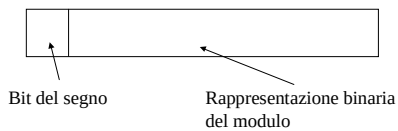
■ Operazioni

■ Il problema del trabocco (overflow)

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Modulo e segno



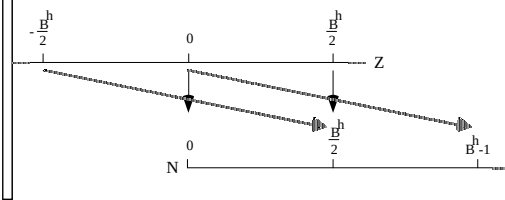
Es. $r_{ms}(5) = 000101$

Es. $r_{ms}(-5) = 100101$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento a una base B (su h cifre)



Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento a una base B (su h cifre)

$$r_c(x) = \begin{cases} r_B(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{B^h}{2} \\ r_B(B^h - |x|) & \text{se } -\frac{B^h}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento alla base 2 (su h cifre)

$$r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^h}{2} = 2^{h-1} \\ r_2(2^h - |x|) & \text{se } -\frac{2^h}{2} = -2^{h-1} \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)

$$r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)

- Sia $x = (5)_{10}$, si ha $0 < 5 < 8$ quindi

$$r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$r_c(x) = r_2(x) = (0101)$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)
- Sia $x = (-5)_{10}$ si ha $-8 < -5 < 0$ quindi
- $r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$
- $r_c(x) = r_2(2^4 - |x|) = r_2(16 - |-5|) = r_2(11) = (1011)_2$

Rappresentazione dei dati

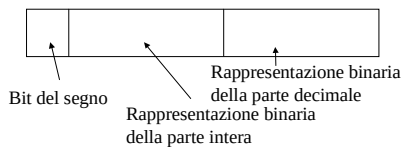
■ Interi con segno - Min e Max

- Complemento alla base 2 (su k cifre)
- MIN: $(100\dots 0)$
- MAX: $(011\dots 1)$
- Es. $k=7$ MIN = $(1000000) \implies (-2^{7-1}) = -64$
- MAX = $(0111111) \implies (2^{7-1} - 1) = 63$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali

- Virgola fissa



Es. $r_{ms}(2.5) = 00010.10\dots$ Es. $r_{ms}(-2.5) = 10010.10\dots$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Quanti diversi numeri posso rappresentare?

k bit per la parte intera e h per la parte decimale
 $\implies$ ho $2^{(k+h)}$ numeri diversi

Es. $k=2$ $h=5$ $\implies$ ho $2^7 = 128$ numeri razionali diversi

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Quale max e min ?

k bit per la parte intera
 $\implies$ min = 0 max = $2^k - 1$

h per la parte decimale
 $\implies$ min = 0 max = $1 - 2^{-h}$

Es. $k=2$ $h=5$ $\implies$ min = 0 max = $(2^2 - 1) \cdot (1 - 2^{-5}) = 3.96875$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Qual è la distanza tra due numeri razionali rappresentati?

Se ho h bit per la parte decimale

$\implies r(x) - r(x_{succ}) = 0\dots 0,0\dots 1 = 2^{-h}$

Es. $k=2$ $h=5$ $\implies r(x) - r(x_{succ}) = (0.00001)_2 = 2^{-5} = (0.03125)_{10}$

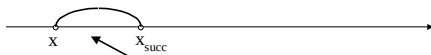
Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Qual è la distanza tra due numeri razionali rappresentati?

Se ho h bit per la parte decimale

$$\implies r(x) - r(x_{\text{succ}}) = 0 \dots 0, 0 \dots 1 = 2^{-h}$$



Es. $k=2, h=5 \implies r(x) - r(x_{\text{succ}}) = (0.00001)_2 = 2^{-5} = (0.03125)_{10}$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali

- Virgola Mobile $x = \pm m 2^e$

0/1	m	e
segno	Rappresentazione binaria della mantissa	Rappresentazione binaria dell'esponente

Es: $123,45 = 0,12345 \cdot 10^3$ $x = 0,000045 = 0,45 \cdot 10^{-4}$
 $r_{\text{vm}}(123,45) = \langle +, 12345, 3 \rangle$ $r_{\text{vm}}(x) = \langle +, 45, -4 \rangle$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$

Normalizzazione

Complemento

- m ed e hanno dimensione fissa, h e k rispettivamente

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)
$m: \min = (1 \dots 0) = 2^{-1}$		$e: \min = (10 \dots 0) = -2^{k-1}$
$\max = (1 \dots 1) = 2^h - 1$		$\max = (01 \dots 1) = 2^{k-1} - 1$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$

- m ed e hanno dimensione fissa, h e k rispettivamente

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)

$m: \min = (1 \dots 0) = 2^{-1}$ $e: \min = (10 \dots 0) = -2^{k-1}$
 $\max = (1 \dots 1) = 2^h - 1$ $\max = (01 \dots 1) = 2^{k-1} - 1$

$$x: \min = m_{\min} 2^{e_{\min}} = 2^{-1} \cdot 2^{-2^{k-1}} = 2^{-2^{k-1}-1}$$

$$x: \max = m_{\max} 2^{e_{\max}} = (2^h - 1) \cdot 2^{2^{k-1}-1}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)

$$x: \min = m_{\min} 2^{e_{\min}} = 2^{-1} \cdot 2^{-2^{k-1}} = 2^{-2^{k-1}-1}$$

$$x: \max = m_{\max} 2^{e_{\max}} = (2^h - 1) \cdot 2^{2^{k-1}-1}$$

Per $h=2, k=5$ $x: \min = 2^{-1} \cdot 2^{-2^{5-1}} = 2^{-2^4-1} = 2^{-17}$
 $x: \max = (2^2 - 1) \cdot 2^{2^{5-1}-1} = 3 \cdot 2^{16-1} = 3 \cdot 2^{15}$

Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

- Due numeri successivi

$$x = \pm m 2^e \quad x_{\text{succ}} = \pm m' 2^{e'}$$

hanno lo stesso esponente e e mantisse m e m' successive

$$x = \pm m 2^e \quad x_{\text{succ}} = \pm m_{\text{succ}} 2^e$$

$$m: (1 \dots 0) = 2^{-1} \quad m_{\text{succ}} = (10 \dots 1) = 2^{-1} + 2^{-h}$$

$$\implies x - x_{\text{succ}} = (m - m_{\text{succ}}) 2^e = (0 \dots 01) 2^e = 2^{-h} 2^e \begin{cases} e \text{ MIN} \\ e \text{ MAX} \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

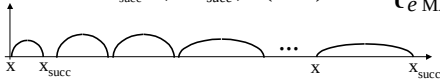
– Due numeri successivi

$$x = \pm m 2^e \quad x_{\text{succ}} = \pm m_{\text{succ}} 2^e$$

hanno lo stesso esponente e e mantisse m e m' successive

$$m: (1\dots 0) = 2^{-1} \quad m_{\text{succ}} = (10\dots 1) = 2^{-1+2^{-h}}$$

$$\Rightarrow x - x_{\text{succ}} = (m - m_{\text{succ}}) 2^e = (0\dots 01) 2^e = 2^{-h} 2^e \begin{cases} e \text{ MIN} \\ e \text{ MAX} \end{cases}$$



Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

– Il formato IEEE $x = \pm m 2^e$

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)

$$h = 23$$

$$k = 8$$

$$x: \min 2^{-1} \cdot 2^{-2^{k-1}} = 2^{-2^{k-1}-1} = 2^{-2^7-1} = 2^{-129}$$

$$x: \max (2^{h-1}) \cdot 2^{2^{k-1}-1} = (2^{23-1}) \cdot 2^{127-1} = 2^{127} = !!!$$

$$\text{Es. } (13.25)_{10} \Rightarrow 0 \ 101110000000000000000000 \ 11111100$$