

Linguaggi e Modelli dei dati e della conoscenza

“ragionamento automatico e logica”

Maria Teresa PAZIENZA
Roberto BASILI
Fabio Massimo ZANZOTTO
a.a. 2004-05

L'Intelligenza Artificiale

Comportamento intelligente di entità artificiali

Un “comportamento intelligente” include

percezione
ragionamento
apprendimento
comunicazione
azione ...

Cos'è l'IA?

***L'Intelligenza Artificiale è lo studio delle
facoltà mentali attraverso l'uso di modelli
computazionali***

Assunzione implicita:

Il modo in cui il cervello umano lavora è simile al modo in cui i calcolatori lavorano

Si può assimilare ciò che il cervello umano fa, con una qualche, complessa modalità di calcolo

Cos'è l'IA?

Robotica (programmazione di comportamenti in ambienti dinamici)

Comprensione del linguaggio naturale

Diagnostica

Visione

Pianificazione

Apprendimento automatico

....

Scopi dell'IA

Scientifico

–Comprensione della nozione di comportamento intelligente

Ingegneristico

–Sviluppo di macchine, dispositivi capaci di comportamento intelligente

–“capaci (almeno) quanto l'uomo”

Cos'è l'IA?

Anche se

l'IA si interessa di modalità di comportamento per così dire “intelligenti”, non viene fatta alcuna ipotesi su come si possa raggiungere l'obiettivo (il risultato), per cui si possono perseguire anche metodi completamente diversi da quelli usati dall'uomo per ottenere lo stesso risultato.

Cos'è l'IA?

Il *test di Turing*

- Una persona C che fa solo domande può determinare chi tra A e B è una persona
- Rimpiazza A con una macchina
- C sbaglierà ora con più frequenza?
- A ora penserà?

Rappresentazione per l'IA

Per **rappresentazione** si intende una versione “artificiale” del mondo,

che possa supportare il modo d'uso di un sistema di calcolo
e le sue interazioni sullo stesso argomento con un altro sistema di calcolo

La stessa *rappresentazione interna* può essere supportata da una moltitudine di strutture dati diverse; si suppone che sia facile passare da una struttura ad un'altra (traduzione), ovvero tutte queste strutture dati siano varianti della stessa *rappresentazione interna*

Rappresentazione interna

Per capire il ruolo della rappresentazione interna e le sue proprietà, si consideri un sistema capace di capire il linguaggio naturale.

Capire una frase/domanda significa:

- Tradurre nella propria rappresentazione interna la frase/domanda ricevuta, e memorizzarla
- Usare questa rappresentazione interna per trovare in memoria informazioni correlate ad essa (disambiguare)
- Coordinare/comporre tali informazioni ritrovate e tradurle in una frase da produrre come risultato

La rappresentazione interna permette di risolvere ambiguità referenziali.

Rappresentazione interna

Risolvere le *ambiguità referenziali* significa, per esempio, associare il nome proprio a pronomi tipo *lui, lei*, etc.

Ma ciò non basta perché ci possono essere più entità/individui con lo stesso nome proprio.

Associare un identificatore unico a ciascun nome proprio permette di specificare l'***istanza***.

L'identificatore dell'istanza corrisponde ad un simbolo della rappresentazione interna

Rappresentazione interna

Nel momento in cui i simboli/parole della rappresentazione interna hanno un significato non unico, si ha ambiguità del significato delle parole (*word-sense ambiguity*)

Per risolvere tale problema si deve definire un simbolo diverso per ogni significato

In una rappresentazione interna, ciascun predicato (ovvero il fatto che si asserisce rispetto ad una o più entità) deve essere non-ambiguo

Rappresentazione interna

Per *struttura funzionale di una frase* si intende il ruolo che la posizione di una parola all'interno di una frase può assumere

La rappresentazione interna deve indicare chiaramente la struttura funzionale per evitare ambiguità interpretative con frasi composte dalle stesse parole ma in ordine diverso.

Rappresentazione interna

Una notazione logica è un buon candidato ad essere una rappresentazione interna.

Esistono altre tipologie di rappresentazione interna equivalenti alla logica: per esempio le reti semantiche (associative networks) che usano una propria notazione.

Nodi al posto di termini, archi orientati etichettati al posto delle relazioni.

Il supporto al ragionamento fornito dalle due notazioni è quasi equivalente, laddove le reti non hanno alcuna capacità di rappresentare connettivi logici (es. if) o la quantificazione.

Rappresentazione interna

Esistono altri fattori da considerare, quali ad esempio la capacità che hanno solo le reti semantiche di associare direttamente al nodo (indicizzazione) tutte le informazioni relative al termine

Le reti semantiche suggeriscono una struttura di puntatori (in avanti ed indietro) che supportano l'accesso alle informazioni con facilità.

Le notazioni lineari del calcolo dei predicati (per esempio) producono una lunga lista di formule che devono essere analizzate per trovare un fatto particolare, implicando così una fase di ricerca molto lunga.

Rappresentazione interna

Gestire il fenomeno dell' ereditarietà delle proprietà espresso nelle gerarchie ISA (isa, is-a, IS_A,..)

Non si vuole solo esprimere il fatto che un termine è una istanza di un altro termine/classe, bensì che esso gode di tutte le proprietà del termine padre ed, eventualmente di tutti quelli da cui esso può ereditare ulteriori proprietà.

Le reti semantiche permettono di rappresentare l'ereditarietà delle proprietà senza doverle esplicitare tutte elencandole.

Rappresentazione interna

Slot-assertion notation

Il calcolo dei predicati permette di indicare le relazioni funzionali dei termini (o significato) a seconda della posizione che essi occupano nella formula

Nella notazione a slot i vari argomenti (slot) di un predicato sono espressi come asserzioni separate

Rappresentazione della conoscenza

Fondamento dei sistemi per il ragionamento automatico

Formalmente:

Linguaggi di rappresentazione ...
cioè sistemi di sintassi/semantica
dotati di propri meccanismi di inferenza

Sistemi di ragionamento logico

Sistemi che ragionano esplicitamente *con* e *sulla* conoscenza che è stata precedentemente rappresentata: la rappresentazione ed il ragionamento costituiscono le caratteristiche principali di tali sistemi.

Vantaggio: Modularità

la struttura di controllo è isolata dalla conoscenza che è indipendente dalle altre componenti il sistema

Sistemi di ragionamento logico tipologie

- Dimostratori di teoremi e linguaggi di programmazione logica
- Sistemi di produzioni
- Sistemi a frame e reti semantiche
- Sistemi di logica descrittiva (logiche terminologiche)

Sistemi di ragionamento logico attività fondamentali

1. **Aggiungere** un nuovo fatto alla Base di conoscenza (BdC) (a seguito di inferenza)
2. **Derivare** fatti implicati da una BdC arricchita da un nuovo fatto
3. **Decidere** se una interrogazione è implicata da una BdC
4. **Decidere** se una interrogazione è immagazzinata esplicitamente in una BdC
5. **Aggiornare/Cancelare** una frase in una BdC

Reti semantiche

Le reti semantiche si basano su una metafora grafica: gli oggetti del mondo (“individui o categorie”) sono **nodi di un grafo** e le “relazioni tra di loro” (detti anche ruoli) sono **archi del grafo**

I nodi sono organizzati in una struttura tassonomica

Gli archi tra i nodi rappresentano relazioni binarie di diversa tipologia tra le categorie di oggetti coinvolte

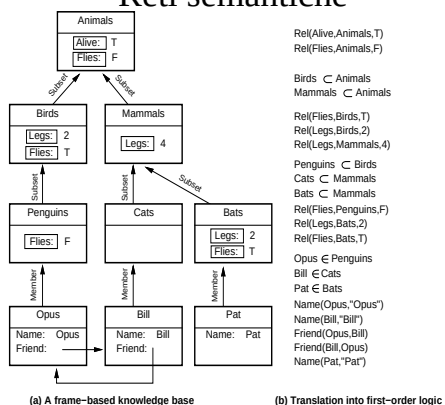
Reti semantiche

Imprecisa natura delle reti semantiche legata al fatto che non si distingue tra nodi che rappresentano classi e nodi che rappresentano oggetti individuali

Distinguere le relazioni di appartenenza:

- **Is-a** (*elemento / istanza* di una classe)
- **a-kind-of** (*sottoclasse*)

Reti semantiche



Reti semantiche

La semantica di una rete semantica può essere enunciata fornendo gli equivalenti in logica del primo ordine per le asserzioni nel linguaggio della rete.

Logica come ling. rappr. conoscenza

Vantaggi

Precisione: l'interpretazione delle formule (semantica) è ben definita. Ci sono regole di inferenza corrette e complete.

Flessibilità: la conoscenza è rappresentata in modo dichiarativo, può essere utilizzata per processi diversi.

Modularità: le conoscenze (asserzioni) sono tra loro indipendenti. Possono essere aggiunte (eliminate) in modo incrementale senza dover modificare tutta la BdC

Logica come ling. rappr. conoscenza

Limiti

Atemporalità: le asserzioni sono indipendenti dal tempo (Es. Bella(maria) asserisce la bellezza di Maria indipendentemente dal tempo)

Conoscenze certe: si può predicare il vero o il falso solo di una conoscenza di cui si è certi

Scarsa leggibilità: una stessa entità è rappresentata da enunciati tra loro indipendenti, per cui non si può ricostruire la conoscenza complessiva su essa

Inefficienza: il processo di dimostrazione ha complessità esponenziale

Sistemi di programmazione logica

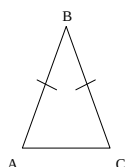
La programmazione logica vede
il programma ed i suoi input come affermazioni
logiche sul mondo,
e
il processo in cui si rendono esplicite le
conseguenze come processo di inferenza.

Cosa costituisce una 'logica'?

- Un Linguaggio (*sintassi*)
 - Definisce le frasi legali del linguaggio
- Una Semantica
 - Ci dice cose significano le frasi (e le inferenze)
 - Determina il collegamento tra il linguaggio ed il mondo descritto
- Regole di inferenza
 - Suggestiscono metodi per manipolare le frasi scritte nel nostro linguaggio

Verso la Logica Proposizionale: un esempio

- Semplice Teorema di Geometria



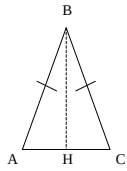
Dato un triangolo isoscele ovvero con $AB=BC$, si vuole dimostrare che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}$ sono uguali.

Conoscenze pregresse



- (A - Assioma) Se due triangoli sono uguali, i due triangoli hanno lati ed angoli uguali
- (T- Teorema) Se due triangoli hanno due lati e l'angolo sotteso uguali, allora i due triangoli sono uguali

Dimostrazione

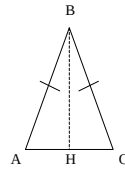


- BH bisettrice di ABC cioè $ABH = HBC$ (Costruzione C)

Dimostrazione

- $AB = BC$ *per ipotesi H*
- $\hat{A} = \hat{C}$ *per C*
- Il triangolo HBC è uguale al triangolo ABH *per T*
- $\hat{A} = \hat{C}$ *per A*

Come avviene la dimostrazione



Abbiamo trasformato:

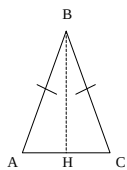
T in

$\Rightarrow$ Se $AB = BC$ e $BH = BH$ e $ABH = HBC$, allora il triangolo ABH è uguale al triangolo HBC

A in

$\Rightarrow$ Se triangolo ABH è uguale al triangolo HBC, allora $AB = BC$ e $BH = BH$ e $AH = HC$ e $\hat{A} = \hat{C}$

Semplice Teorema: Formalizzazione



Riflessione:

Abbiamo razionalizzato il processo che permette di affermare che nel triangolo:

$$AB = BC \vdash \hat{A} = \hat{C}$$

dove l'ipotesi H e' $AB = BC$

Formalizzazione

$$AB = BC \vdash \hat{A} = \hat{C}$$

Ipotesi e costruzione formano un insieme di premesse:

$$S = \{AB = BC, ABH = HBC, BH = BH\}$$

Le conoscenze pregresse possono essere scritte come segue:

$$T: AB = BC \wedge BH = BH \wedge ABH = HBC \Rightarrow trABH = trHBC$$

$$A: trABH = trHBC \Rightarrow AB = BC \wedge BH = BH \wedge AH = HC \wedge ABH = HBC \wedge AHB = CHB \wedge \hat{A} = \hat{C}$$

Formalizzazione e Prova

$$AB = BC \vdash \hat{A} = \hat{C}$$

Abbiamo costruito una *catena* di formule:

- | | |
|--|----------------------------|
| P1: $AB = BC$ | da S |
| P2: $ABH = HBC$ | da S |
| P3: $BH = BH$ | da S |
| P4: $AB = BC \wedge BH = BH \wedge ABH = HBC$ | da P1, P2, P3 (Inferenza!) |
| P5: $trABH = trHBC$ | da P4, T (MP!) |
| P6: $AB = BC \wedge BH = BH \wedge AH = HC \wedge ABH = HBC \wedge AHB = CHB \wedge \hat{A} = \hat{C}$ | da P5, A |
| P7: $\hat{A} = \hat{C}$ | da P6 (Inferenza!) |

Processo di dimostrazione

$$S \vdash F$$

Una dimostrazione per

F è conseguenza di S

è una sequenza

$$DIM = P_1, P_2, \dots, P_n$$

dove

- $P_n = F$
- $P_i \in S$ oppure P_i è ottenibile da $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ (con $i_1 < i, \dots, i_m < i$) applicando una delle **regole di inferenza**

Regole di inferenza:
Modus Ponens (MP)

$$\frac{P \Rightarrow B, P}{B} \text{ MP}$$

Se piove, la strada è bagnata.
Piove.

Allora la strada è bagnata.

Regole di inferenza:
AND-Introduzione (AI) e AND-Eliminazione(AE)

AND-Introduzione

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \text{ AI}$$

AND-Eliminazione

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}{A_i} \text{ AE}$$

Calcolo Proposizionale
Sistema (d'assiomi)
SINTASSI

Ingredienti:

- Un insieme di simboli **L**
 - **Letterali:** $A_1, \dots, A_n$
 - **Connettivi Logici:** $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, (,)$
- Un sottoinsieme FBF di L^* detto delle formule ben formate

Calcolo Proposizionale
Sistema (d'assiomi)
SINTASSI

Ingredienti:

- Un insieme $\text{ASSIOMI} \subseteq \text{FBF}$
- Un insieme **R** di **regole di inferenza**

Abbiamo a disposizione:

- Meccanismo della **dimostrazione**

$S \quad \vdash \quad F$

Connettivi Logici

	SIMBOLO	
NOT	$\neg$	$\sim$
AND	$\wedge$	
OR	$\vee$	
IMPLIES	$\Rightarrow$	$\supset$
IFF	$\Leftrightarrow$	

FBF formule ben formate

- I **letterali** sono **formule ben formate**
- Se $A \in \text{FBF}$ e $B \in \text{FBF}$, allora
 - $\neg A \in \text{FBF}$
 - $A \wedge B \in \text{FBF}$
 - $A \vee B \in \text{FBF}$
 - $A \Rightarrow B \in \text{FBF}$

Assiomi (Conoscenze pregresse)

- **A1:** $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- **A2:** $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- **A3:** $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$
- **A4:** $\neg(A \wedge \neg A)$
- **A5:** $A \vee \neg A$

Esempio

Se l'unicorno è mitico, allora è immortale,
ma se non è mitico allora è mortale.
Se è mortale o immortale, allora è cornuto.
L'unicorno è magico se è cornuto.

Domande:

- a) L'unicorno è magico?
- b) L'unicorno è cornuto?

Procedimento

1. Esprimere il problema in forma di logica dei predicati
2. Individuare i teoremi da dimostrare
3. Dimostrare i teoremi

Esempio

Se l'(unicorno è mitico), allora l'(unicorno è immortale), ma se non (è mitico) allora (è mortale).
Se l'(unicorno è mortale) o l'(unicorno è immortale), allora (unicorno è cornuto). L'(unicorno è magico) se l'(unicorno è cornuto).

Letterali:

UM = unicorno è mitico

UI = unicorno è immortale

UMag = unicorno è magico

UC = unicorno è cornuto

Esempio

Se l'(unicorno è mitico)^{UM}, allora l'(unicorno è immortale)^{UI}, ma se non (è mitico)^{UM} allora (è mortale)^{¬UI}. Se l'(unicorno è mortale)^{¬UI} o l'(unicorno è immortale)^{UI}, allora (unicorno è cornuto)^{UC}. L'(unicorno è magico)^{UMag} se l'(unicorno è cornuto)^{UC}.

Traduzione:

$UM \Rightarrow UI$

$\neg UM \Rightarrow \neg UI$

$\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$

$UC \Rightarrow UMag$

Esempio

- a) L'unicorno è magico?
- b) L'unicorno è cornuto?

Traduzione:

$S = \{UM \Rightarrow UI, \neg UM \Rightarrow \neg UI, \neg UI \vee UI \Rightarrow UC, UC \Rightarrow UMag\}$

a) $S \vdash UMag$

b) $S \vdash UC$

Esempio

$$S \vdash UC$$

P1: $\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$ da S
 P2: $\neg UI \vee UI$ da A4
 P3: UC da P1, P2 e MP

Esempio

$$S \vdash UMag$$

P1: $\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$ da S
 P2: $\neg UI \vee UI$ da A4
 P3: UC da P1, P2 e MP
 P4: $UC \Rightarrow UMag$ da S
 P5: UMag da P3, P4 e MP

Ricapitolando

- Logica Proposizionale (fin qui vista)
 - Permette di imbrigliare ragionamenti in simboli
 - Permette di dedurre simboli da altri simboli
 - Cosa manca?
 - Il concetto di Vero e di Falso

Logica Proposizionale SEMANTICA

Funzione di interpretazione I

$$I : FBF \rightarrow \{V, F\}$$

dove V e' vero e F sta per falso

I è **composizionale** ovvero:

Per qualsiasi A e B in FBF

$$\begin{aligned} I(\neg A) &= \neg I(A) \\ I(A \wedge B) &= I(A) \wedge I(B) \\ I(A \vee B) &= I(A) \vee I(B) \\ I(A \Rightarrow B) &= I(A) \Rightarrow I(B) \end{aligned}$$

Semantica nella Logica Proposizionale

Cosa significa?

$$I(A) = V \text{ (vero)} \text{ o } I(A) = F \text{ (falso)}$$

Una FBF A e' vera quando A esprime una proprietà che sussiste nel mondo, cioè lo stato delle cose del mondo verifica la proprietà A

Es. Se A="Socrate e' un uomo" allora

$I(A)=V$ in tutti i *mondi* in cui vive un uomo di nome Socrate

Semantica dei connettivi logici

I connettivi logici si comportano in modo stabile rispetto ai valori di verità V ed F.

Per definire $I(P \wedge Q) = I(P) \wedge I(Q)$ dobbiamo definire l'operatore $\wedge$ come funzione tra $\{V, F\}^2$ e se stesso, cioè

$$\wedge : \{V, F\} \times \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

Logica Proporzionale SEMANTICA

Lo scopo del nostro calcolo

$$S \models C$$

Assumere Vere le FBF in S e verificare
che una (nuova) FBF C sia Vera

Esempio

$$\emptyset \models A \vee \neg A$$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
V	F	V
F	V	V

Esempio

$$\emptyset \models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

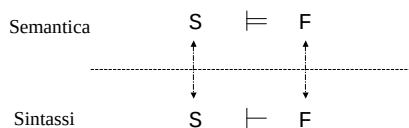
Esercizio: Provare a costruire la tabella di verità degli altri assiomi.

Tautologie e modelli

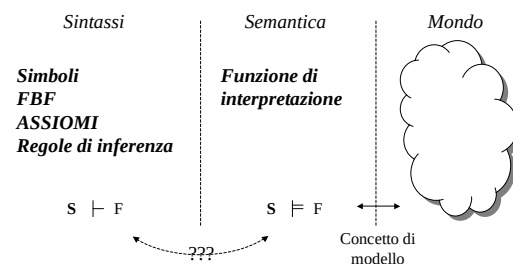
- Una FBF sempre vera indipendentemente dal valore dei **letterali** viene detta **tautologia**
- Un modello di un insieme F di FBF è una particolare **interpretazione I** che rende vere tutte le formule in F

Osservazione

- Chi garantisce?



Logica proposizionale Sintassi vs Semantica



Sintassi vs Semantica

Osservazioni

Una dimostrazione per

$$S \vdash F$$

è una sequenza

$$DIM = P_1, P_2, \dots, P_n$$

- $P_n = F$
- $P_i \in S$
- $P_i \in \text{ASSIOMI}$
- P_i è ottenibile da $P_{i1}, \dots, P_{im}$ (con $i1 < i, \dots, im < i$) applicando una **regola di inferenza**

Sintassi vs Semantica

Osservazioni

$$DIM = P_1, P_2, \dots, P_n$$

Problema: introduciamo sempre formule vere?

- $P_i \in S$ vere per ipotesi
- $P_i \in \text{ASSIOMI}$ veri poiché tautologie

- P_i è ottenibile da $P_{i1}, \dots, P_{im}$ (con $i1 < i, \dots, im < i$) applicando una **regola di inferenza**

anello debole

Sintassi vs Semantica

Regole di inferenza e veridicità

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \text{ AI}$$

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}{A_i} \text{ AE}$$

$$\frac{P \Rightarrow B, P}{B} \text{ MP}$$

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sintassi vs Semantica

- La preservazione della veridicità è osservabile per induzione
- Formalmente:
 - (Meta)Teorema di completezza
 - (Meta)Teorema di Deduzione (+ Ogni teorema di L è una tautologia)

Conoscenze ed Eurismi

- Ragionamento si basa:
 - un insieme di conoscenze (od osservazioni)
 - un insieme di regole apprese detti "eurismi"

Esempi

"Uscire con l'ombrello quando è nuvoloso"

"Colpire la palla da tennis nel punto più alto della parabola di rimbalzo"

"Far percepire al cliente che ha sempre ragione"

"Se il capo vuole avere ragione è meglio accordargliela"

Logica proposizionale (limiti)

Socrate è un umano.

Gli umani sono mortali. (A)

Allora Socrate è mortale.

Traduzione di (A) nella logica proposizionale

Se Gino è un umano, allora Gino è mortale.

Se Valeria è un umano, allora Valeria è mortale.

Se Raffaella è un umano, allora Raffaella è mortale.

Se Socrate è un umano, allora Socrate è mortale.

...

Se X è un umano, allora X è mortale.

Logica del primo ordine Sintassi

Ingredienti:

Simboli **L**

– **Letterali**

- Costanti individuali A_i
- Variabili individuali α_i
- Lettere funzionali f_i
- Lettere predicative P_i

– **Connettivi Logici:** $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, (,)\} \cup \{\exists, \forall\}$

Logica del primo ordine Sintassi

Ingredienti:

Formule Ben Formate (FBF)

– Le Formule Atomiche sono FBF

– Se f_1 e $f_2 \in \text{FBF}$ e x è una variabile individuale allora

$\exists x.f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \wedge f_2 \in \text{FBF}$
$\forall x.f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \vee f_2 \in \text{FBF}$
$\neg f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \Rightarrow f_2 \in \text{FBF}$

Logica del primo ordine Sintassi

Ingredienti:

Termine **T**

costanti individuali $\in T$

variabili individuali $\in T$

Se $t_1, \dots, t_n \in T$ allora

$f_i(t_1, \dots, t_n) \in T$

Formule Atomiche

Se $t_1, \dots, t_n \in T$ allora

$P_i(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula atomica**

Esempio

• Sono formule ben formate (FBF) le seguenti

- **padre_di(luigi, mario)**
- $\forall x \text{ vinopregiato}(x) \wedge \text{ama}(\text{luigi}, x)$
"luigi ama tutti i vini pregiati"
- $\exists x \text{ padre_di}(\text{luigi}, \text{capoufficio}(\text{mario})) \wedge \text{ama}(\text{luigi}, x) \wedge \text{donna}(x)$
"Luigi e' il padre del capoufficio di Mario e ama una donna"

dove

- **luigi, mario** sono costanti individuali
- **capoufficio()** e' una funzione di arità 1
- **ama(), padre_i(), vinopregiato()** sono predicati

Logica del primo ordine Sintassi

Ingredienti:

Regole di inferenza

– Eliminazione del quantificatore universale

$$\frac{\forall x.F(\dots x \dots)}{\text{SUBST}(\{x/a\}, F(\dots x \dots))}$$

– Eliminazione del quantificatore esistenziale

$$\frac{\exists x.F(\dots x \dots)}{\text{SUBST}(\{x/a\}, F(\dots x \dots))} \quad \text{Dove } a \text{ non appartiene a costanti già introdotte}$$

– Introduzione del quantificatore esistenziale

$$\frac{F(\dots a \dots)}{\exists x.F(\dots x \dots)}$$

Logica del primo ordine Semantica

Interpretazione

• **Insieme D**

$I(a_i) = d_i$ per ciascuna costante individuale

• **Insieme di funzioni**

$I(f_i) = f_i$

$f_i: D^n \rightarrow D$ per ciascuna lettera funzionale f_i

• **Insieme di relazioni**

$I(P_i) = \mathcal{P}_i$

$\mathcal{P}_i \subseteq D^n$ per ciascuna lettera predicativa P_i

Logica del primo ordine *Semantica*

Interpretazione

- Interpretazione delle **formule atomiche**

- $I(P_i(a_1, \dots, a_n)) = V$ se $(I(a_1), \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti
- $I(\forall x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$
 se per tutti gli $x \in D$ accade che
 $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti

Logica del primo ordine *Semantica*

Interpretazione

- Interpretazione delle **formule quantificate**

- $I(\forall x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$ se per tutti gli $x \in D$ accade
 che $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti
- $I(\exists x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$ se esiste $x \in D$ tale che
 $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti

Logica proposizionale vs. Logica del primo ordine

“Aggiunte”:

- Strutturazione dei letterali
- Introduzione delle variabili
- Introduzione dei quantificatori

Logica del primo ordine

Socrate è un uomo.
Gli uomini sono mortali.
Allora Socrate è mortale.

- Costanti individuali
 $\{\text{Socrate, Pino, Gino, Rino}\}$
- Lettere predicative
 $\{\text{Uomo, Mortale}\}$

Logica del primo ordine

Socrate è un uomo.
Gli uomini sono mortali.
Allora Socrate è mortale.

- Traduzione affermazioni
 $\text{Uomo}(\text{Socrate})$
 $\forall x. (\text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x))$
- Traduzione goal
 $\text{Mortale}(\text{Socrate})$

Inferenza nella Logica del primo ordine

$\forall x. (\text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x))$ **Universal Elimination**

 $(\text{SUBST}(\{x/\text{Socrate}\}, \text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x)))$
 $\text{Uomo}(\text{Socrate}) \Rightarrow \text{Mortale}(\text{Socrate}), \text{Uomo}(\text{Socrate})$ **MP**

 $\text{Mortale}(\text{Socrate})$