



corso di Laurea in Scienze Biologiche

corso di Laboratorio di Fisica

Guide di laboratorio **(bozza)**

a.a. 1999-2000

Livio Narici

Quelle che seguono sono delle schede di laboratorio da usare come guida durante lo svolgimento delle esperienze di laboratorio.

Per quanto riguarda le prime tre esperienze, sul pendolo, la traccia è la medesima di quella seguita nelle note integrative, tuttavia alcuni particolari importanti, a cominciare dal numero di misure, sono, volutamente, diversi.

Lo studente deve seguire la propria esperienza e interpretarne i risultati, senza cedere alla tentazione di riprodurre esattamente i risultati descritti nelle note.

N.B. Questa è una bozza, suggerimenti e segnalazioni di errori saranno graditi

Esperienza n° 1 **IL PENDOLO I****A disposizione:**

2 sostegni
 filo di nylon
 massa di acciaio ($m_{acc} = 157 \pm 1$ g)
 cronometro al centesimo di secondo
 metro a nastro
 righello

Questa esperienza sul pendolo mira a:

- misurare l'indeterminazione che si ha quando si fa partire/fermare il cronometro all'inizio/fine di un periodo completo;
- verificare se la distribuzione di una serie di misure della durata del singolo periodo sia o meno gaussiana;
- stabilire se il periodo del pendolo dipenda o meno dall'angolo di massima oscillazione.

Montaggio

Il filo di nylon si serra con la vite all'estremità dei sostegni. Si utilizzi una sospensione bifilare (vedi figura 1) per fissare il piano di oscillazione.

Si faccia attenzione a serrare il filo in modo da farlo uscire dal basso, questo per ridurre possibili attriti.

Si utilizzerà una lunghezza L pari a circa 50 cm. Verranno eseguite tre serie di 100 misure del periodo con massima ampiezza A pari a circa 35 cm, 7 cm, 3 cm.

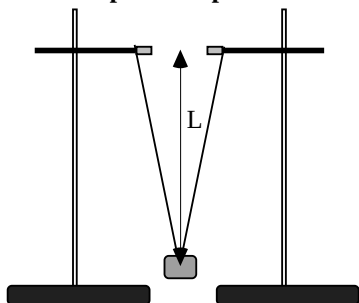


Figura 1

La misura

- Montare il pendolo con $L \approx 50$ cm
(la massa dovrebbe essere abbastanza vicina al piano del tavolo, per facilitare la successiva determinazione di A)

- Misurare L con il metro a nastro, avendo cura di stimare la posizione del centro di massa del pendolo. Stimare l'errore di misura.

*L e il suo errore si possono ottenere da una singola misura, stimando l'errore considerando quello di lettura e le diverse difficoltà insite nella misura stessa, oppure da una serie di 3 misure eseguite dai componenti del gruppo, e dalla dispersione massima delle stesse, avendo ciascuno cura di misurare le lunghezze **SENZA CONOSCERE** i risultati ottenuti dagli altri componenti.*

- Aiutandosi con il righello, propriamente posizionato sul tavolo, scostare di $\approx A$ il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciarlo oscillare.

Si noti che non vi è necessità di una misura di A accurata, in quanto vogliamo misurare gli effetti di cambiamenti grandi di A

- Eseguire 100 misure di periodo.

Conviene scegliere uno degli estremi del moto del pendolo e misurare il tempo tra due successivi passaggi da tale estremo. Con un po' di pratica si può eseguire una misura ogni due oscillazioni, comunicando il risultato a voce ad un compagno che lo trascriverà sulla tabella opportuna. Quando la massima elongazione si discosta sensibilmente da A , si dovrà fermare il pendolo riposizionarlo e ricominciare.

- Ripetere per i tre valori di A

L'analisi dei dati

Per ciascuna delle tre serie:

- Si calcoli media e deviazione standard della distribuzione delle misure, e deviazione standard della media.

Si faccia attenzione al significato attribuibile alla deviazione standard della media, con riferimento all'errore di lettura del cronometro

(a)

La deviazione standard della distribuzione ci fornisce una misura dell'indeterminazione che si ha quando si fa partire/fermare il cronometro all'inizio/fine di un periodo completo

NOTA: conservare questo valore per il III laboratorio

Per una delle tre serie:

- Si costruisca l'istogramma delle misure.

*Si consiglia di utilizzare un'intervallo $\Delta T = 0.03$ s. Si procede come segue: **i)** Si definiscono gli intervalli, per le misure che cadono al confine fra due intervalli si stabilisce se queste verranno attribuite all'intervallo inferiore o superiore. **ii)** Si scrivono gli intervalli sulla prima colonna di una tabella. **iii)** Un componente del gruppo legge quindi lentamente le N misure di periodo. Un altro componente scrive una stanghetta in corrispondenza dell'intervallo nel quale cade ogni misura. **iv)** Alla fine si contano le stanghettes.*

- Si esegua il test del χ^2 sulla distribuzione con lo scopo di vedere se è possibile rigettare l'ipotesi di normalità.

Per fare ciò si calcola il valore della $f_{\langle T \rangle, \sigma}(T)$: gaussiana teorica calcolata sulla base della media e della deviazione standard sperimentali. Come semplificazione, invece di integrare la $f_{\langle T \rangle, \sigma}(T)$ tra i due estremi di ciascuno degli M intervalli, si può calcolarla nel punto centrale e moltiplicare per l'ampiezza dell'intervallo. Si ottiene così la probabilità attesa di ottenere una misura in ciascun intervallo. Questa viene poi moltiplicata per il numero di misure eseguito ($N = 100$) ottenendo il valore atteso per ciascun intervallo:

$$E_{T_i} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(T_i - \langle T \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\} \Delta T N \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

attenzione: T_i è il periodo "centrale" dell'intervallo i -esimo, ΔT la larghezza di tale intervallo (nel nostro caso $\Delta T = 0.03$ s), N il numero totale di periodi misurati (nel nostro caso $N = 100$); si noti infine che "i" varia da 1 a M = numero di intervalli.

Si calcola quindi il valore:

$$\frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$$

la cui somma su tutti gli intervalli è il χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$$

Questo valore va quindi diviso per il numero di gradi di libertà GL per ottenere il χ^2 ridotto. Nel nostro caso i vincoli legati alla costruzione della nostra gaussiana sono 3 (N , $\langle T \rangle$, σ), quindi $GL = M - 3$

Dal valore di χ^2/GL e da GL si ricava dalle tavole del χ^2 (Taylor, appendice D) la probabilità di ottenere una distribuzione che, pur essendo gaussiana, si discosta per le fluttuazioni statistiche dalla gaussiana teorica come la nostra.

Si consiglia di costruire la seguente tabella (la somma dei valori nell'ultima colonna, riportata in basso a destra, è il χ^2):

i	T_i	O_{T_i}	E_{T_i}	$\frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$
1				
2				
...				
M				
				$\sum_{i=1}^M \frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$

(b)

Si procede quindi ad adottare o meno l'ipotesi di normalità.

Se si è adottata l'ipotesi di normalità, si procede al confronto delle tre medie ottenute con i diversi valori di A . Visto il valore di N ($\gg 30$) si utilizza la distribuzione gaussiana.

- Si confronta la differenza delle medie con la deviazione standard di tale differenza e ci si chiede se si possa rigettare o meno l'ipotesi che tale differenza sia nulla (medie uguali).

Per fare ciò si calcola la differenza $\langle T_{A_1} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle$ e $\langle T_{A_2} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle$ (dove $A_1 \approx 35$ cm, $A_2 \approx 7$ cm e $A_3 \approx 3$ cm). La deviazione standard di tali differenze sarà calcolata dalla propagazione statistica degli errori:

$$\sigma_{\langle T_{A_1} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle} = \sqrt{\sigma_{\langle T_{A_1} \rangle}^2 + \sigma_{\langle T_{A_3} \rangle}^2}$$

$$\sigma_{\langle T_{A_2} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle} = \sqrt{\sigma_{\langle T_{A_2} \rangle}^2 + \sigma_{\langle T_{A_3} \rangle}^2}$$

dove, ovviamente, tutte le σ sono deviazioni standard **della media**. Il rapporto tra la differenza e la sua deviazione standard

$$\frac{|\langle T_{A_1} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle|}{\sigma_{\langle T_{A_1} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle}}; \quad \frac{|\langle T_{A_2} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle|}{\sigma_{\langle T_{A_2} \rangle - \langle T_{A_3} \rangle}}$$

ci fornisce il numero di deviazioni standard con il quale la differenza tra le medie differisce da zero (la nostra ipotesi). Da tale valore e dalle tavole (Integrale normale degli errori: Taylor, appendice A) si ottiene la probabilità che tale discrepanza sia dovuta ad una fluttuazione statistica.

(c)

Si procede ad accettare o meno l'ipotesi di eguaglianza delle medie dei due periodi posti a confronto, e a commentare, quindi, sulla dipendenza del periodo di oscillazione dall'angolo massimo del moto

Si assume di aver seguito la stessa procedura per le altre due serie di misure.

Esperienza n° 2 **IL PENDOLO II****A disposizione:**

2 sostegni
 filo di nylon
 2 masse (acciaio: $m_{acc} = 157 \pm 1$ g, alluminio: $m_{all} = 62 \pm 1$ g)
 cronometro al centesimo di secondo
 metro a nastro
 righello

Questa seconda esperienza è divisa in due parti.**La prima parte mira a:**

- a) stabilire se il periodo del pendolo dipenda o meno dalla lunghezza del pendolo.
 b) stabilire se il periodo del pendolo dipenda o meno dalla massa del pendolo.

La seconda parte mira a:

- c) stabilire la relazione funzionale fra periodo e lunghezza.

Questa esperienza si giova dei risultati acquisiti nella prima:

- 1) la distribuzione di una serie di misure del singolo periodo non è significativamente diversa da una distribuzione gaussiana;
 2) variazioni di A (e quindi di angolo θ_0) entro certi limiti ($\theta_0 \leq 8^\circ$) non influiscono significativamente sul periodo;

Nota: si ricorda il legame tra A e θ_0 :

$$\theta_0 = \arcsin(A/L)$$

Il montaggio è come nella prima esperienza**La misura: prima parte**

Si utilizzerà

- i) $L \approx 90$ cm e $A \approx 12$ cm ($\theta_0 \approx 8^\circ$)
 ii) due diverse masse

(i) permetterà di avere un θ_0 simile a quello ottenuto nella prima esperienza con $A \approx 7$ cm, e ci permetterà quindi di confrontare le misure di oggi con quella ottenuta la volta scorsa; (ii) ci permetterà di verificare se vi sia dipendenza del periodo dalla massa.

La misura segue la medesima procedura della volta precedente alla quale si rimanda per dettagli e consigli.

- Montare il pendolo con $L \approx 90$ cm, utilizzando la massa di acciaio.
- Misurare L col suo errore.
- Aiutandosi con il righello, propriamente posizionato sul tavolo, scostare di $\approx A$ il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciarlo oscillare.
- Eseguire 100 misure di periodo.
- Ripetere utilizzando la massa di alluminio (stessi valori di L ed A)

L'analisi dei dati

Per ciascuna delle due serie di misure (massa di acciaio/massa di alluminio, per entrambe $L \approx 90$ cm, $\theta_0 \approx 8^\circ$, $N=100$):

- Si calcoli media e deviazione standard della distribuzione delle misure, e deviazione standard della media.

*La deviazione standard della distribuzione ci fornisce una misura dell'indeterminazione che si ha quando si fa partire/fermare il cronometro all'inizio/fine di un periodo completo.
 Tale indeterminazione dovrebbe essere simile a quella trovata nella prima esperienza*

- Si procede quindi al confronto del periodo ottenuto con la massa di acciaio oggi ($L \approx 90$ cm) con quello ottenuto, sempre con la massa di acciaio, durante la precedente esperienza, con un θ_0 simile ($L \approx 50$ cm, $A \approx 7$ cm).

(a)
 Si valuta se tale differenza sia significativa o no
 possibilmente senza ulteriori conti
 (... dovrebbero non essere necessari, ma si deve scrivere il motivo).

- Si confronta la differenza dei periodi ottenuti oggi con le due diverse masse con la deviazione standard di tale differenza e ci si chiede se si possa rigettare o meno l'ipotesi che tale differenza sia nulla (medie uguali). Visto il valore di $N (>>30)$ si utilizza la distribuzione gaussiana. Per la procedura si rimanda alle note della prima esperienza.

(b)

Si procede ad accettare o meno l'ipotesi di eguaglianza delle medie dei due periodi posti a confronto, e a commentare, quindi, sulla dipendenza del periodo di oscillazione dalla massa

La misura: seconda parte

Si utilizzerà

i) valori di $L \approx 70 \text{ cm}, 80 \text{ cm}, 90 \text{ cm}, 100 \text{ cm}$

ii) valori di A tali da avere $\theta_0 \approx 8^\circ$

iii) la massa di acciaio

- Si fissa L . Considerando l'isocronicità del moto del pendolo, si misurerà il tempo T_{Ln} impiegato dal pendolo per oscillare $n = 100$ volte. La misura del periodo T_L sarà quindi pari a $T_L = T_{Ln} / n$; la sua deviazione standard si calcolerà utilizzando il valore precedentemente calcolato di σ_{Ti} (prima parte: deviazione della distribuzione di T_i , che ci fornisce una misura dell'indeterminazione che si ha quando si fa partire/fermare il cronometro all'inizio/fine di un periodo completo):

$$T_L = \frac{T_{Ln}}{n}; \quad \sigma = \frac{\sigma_{Ti}}{n}$$

- Si ripete per gli altri valori di L .

Si consiglia di compilare la seguente tabella (l'uso dell'ultima colonna sarà chiaro in seguito); i dati in prima colonna sono OVVIAMENTE indicativi: lo studente dovrà inserire i dati misurati!:

L (cm)	T_{Ln} (s)	$T_L = T_{Ln} / n$ (s)	T_L^2 (s ²)
≈ 70			
≈ 80			
≈ 90			
≈ 100			

(NOTA: conservare una copia di questa tabella per il prossimo laboratorio)

L'analisi dei dati

Si riportano su grafico i punti sperimentali, T sulle ascisse ed L sulle ordinate (L vs T)

Il grafico ci suggerisce un andamento lineare, e quindi ci prepariamo a verificare un modello lineare tra T ed L . Per completezza verificheremo anche la validità di un modello quadratico (il motivo di questa scelta ci sarà più chiaro dopo la prossima esperienza di laboratorio).

- Si verifica che l'errore (relativo) su T (e su T^2) sia minore dell'errore (relativo) su L . *Questo ci consentirà di utilizzare le relazioni sulle incertezze sui parametri della regressione lineare (queste misure, integrate da altre, verranno anche usate nella prossima esperienza di laboratorio)*

Per la verifica dello modello quadratico, si consiglia di calcolare i valori di T^2 ed inserirli nella tabella precedente.

- Si grafica L vs T^2 .
- Regressione lineare: si calcolano i migliori coefficienti a , b , a' e b' per le relazioni:

$$L = a + bT_L$$

$$L = a' + b'T_L^2$$

(I valori di σ_a e σ_b non vanno calcolati oggi!)

- Si calcola il coefficiente di correlazione di entrambe le rette.

(c)

Si discute il significato attribuibile al coefficiente di correlazione lineare (utilizzare la tabella in appendice C del Taylor) ed al grafico.

Cosa ci dicono le misure e le analisi fatte in merito ai due modelli (lineare e quadratico)? Commentare brevemente. *(Cosa possiamo dire riguardo l'intercetta? Ad esempio per $L = 0$ abbiamo $T = -a/b$ oppure $-a'/b'....$)*

Esperienza n° 3 **IL PENDOLO III****A disposizione:**

2 sostegni
 filo di nylon
 1 massa (acciaio: $m_{acc} = 157 \pm 1$ g)
 cronometro al centesimo di secondo
 metro a nastro
 righello

Questa terza esperienza conclude il nostro lavoro sul pendolo.

L'esperienza mira a:

- a) stabilire la relazione funzionale fra periodo e lunghezza
 b) misurare l'accelerazione di gravità.

Dalle due precedenti esperienze dovremmo aver verificato che:

- a) la distribuzione di una serie di misure del singolo periodo non è significativamente diversa da una distribuzione gaussiana;
 b) variazioni di angolo θ_0 entro certi limiti ($\theta_0 \leq 8^\circ$) non influiscono significativamente sul periodo, mentre quelle al di là di tali limiti ($\theta_0 > 8^\circ$) influiscono significativamente sul periodo.
 c) la massa non influisce significativamente nella determinazione del periodo.
 d) misurando la dipendenza di T con L usando $60 \text{ cm} \leq L \leq 100 \text{ cm}$ la dipendenza L vs. T può essere descritta come lineare o quadratica in modo equivalente.

Il montaggio è come nelle prime esperienze.

La misura**Si utilizzerà**

i) $L \approx 50 \text{ cm}$, $\approx 40 \text{ cm}$, $\approx 30 \text{ cm}$, $\approx 20 \text{ cm}$, ed un valore di A tale da ottenere sempre $\theta_0 \leq 8^\circ$ (ad esempio $A \approx 6 \text{ cm}$, 5 cm , 4 cm , $\approx 2.5 \text{ cm}$)

La procedura è la stessa seguita nelle scorse esperienze, alle cui note si rimanda per dettagli e consigli.

- Montare il pendolo con $L \approx 50 \text{ cm}$
- Aiutandosi con il righello, propriamente posizionato sul tavolo, scostare di $\approx A$ il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciarlo oscillare.

- Considerando l'isocronicità del moto del pendolo, si misurerà il tempo T_{Ln} impiegato dal pendolo per oscillare $n = 80$ volte. La misura del periodo T_L sarà quindi pari a $T_L = T_{Ln} / n$; la sua deviazione standard si calcolerà utilizzando lo stesso valore σ_{Ti} usato nel primo laboratorio (pendolo I), calcolato dalla distribuzione delle misure di un singolo periodo:

$$T_L = \frac{T_{Ln}}{n}; \quad \sigma_T = \frac{\sigma_{Ti}}{n}$$

- Si ripete per gli altri valori di L.

Si compila la seguente tabella (le ultime quattro righe sono i risultati della scorsa esperienza), i dati in prima colonna sono OVVIAMENTE indicativi: lo studente dovrà inserire i dati misurati!

L (cm)	T_{Ln} (s)	$T_L = T_{Ln}/n$ (s)	T_L^2 (s)	g	σ_g
20					
30					
40					
50					
70					
80					
90					
100					

$$\sigma_L = \dots\dots\dots \text{ cm}; \quad \sigma_T = \dots\dots\dots \text{ s}$$

NOTA: si vedrà in seguito la ragione delle ultime due colonne

L'analisi dei dati

- Si verifica che l'errore (relativo) sul periodo sia minore dell'errore (relativo) su L. Questo ci consentirà di utilizzare le relazioni sulle incertezze sui parametri della regressione lineare.

- Si riportano quindi su due grafici i valori di L vs T e di L vs T^2 .

- Regressione lineare: si calcolano i migliori coefficienti a, b, a' e b' per le relazioni:
 $L = a + bT_L$

$$L = a' + b'T_L^2$$

Si consiglia di calcolare i valori di T^2 ed inserirli nella tabella precedente

- Si graficano le due rette
- Si calcola il coefficiente di correlazione di entrambe le rette.
- Si calcolano le deviazioni standard dei coefficienti delle relazioni lineari: σ_a , σ_b , $\sigma_{a'}$, $\sigma_{b'}$

(a)

Si discute il significato attribuibile al coefficiente di correlazione lineare (utilizzare la tabella in appendice C del Taylor) ed al grafico

Cosa ci dicono le misure e le analisi fatte in merito ai due modelli (lineare e quadratico)? Commentare brevemente.

Cosa ci dice il risultato di oggi se paragonato a quello della scorsa esperienza?

(a bis)

SPUNTI DI RIFLESSIONE

Cosa possiamo aggiungere ai commenti precedenti sul valore di a/b (o di a'/b')?

Se non si trascurano le dimensioni finite della massa e la si considera come un'asta omogenea di semilunghezza d , e si continua a chiamare L la distanza del baricentro dell'asta con il punto di sospensione si ottiene facilmente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2}$$

che si riduce alla nota relazione per $d \ll L$.

Cosa ci suggerisce questa considerazione in merito alle nostre misure?

Una volta stabilito che la relazione quadratica è più adeguata a spiegare i nostri dati, si osservi che:

$$L = a' + b'T^2$$

può anche scriversi:

$$T^2 = \frac{L}{b'} - \frac{a'}{b'}$$

Se riteniamo corretta quindi la relazione $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ si può dire:

i) $\frac{a'}{b'}$ deve essere compatibile con zero, nei limiti degli errori.

ii) $g = 4\pi^2 b' \pm 4\pi^2 \sigma_{b'}$

quindi:

- Si calcoli la deviazione standard di $\frac{a'}{b'}$:

$$\sigma_{a'/b'} = \frac{a'}{b'} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{a'}}{a'}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{b'}}{b'}\right)^2}$$

- Si calcoli il valore di g dalla (ii)

(b)

Si commenti:

il valore di g , col suo errore, ottenuto dal coefficiente angolare, il termine noto, l'importanza, in queste considerazioni, dello spunto di riflessione dato prima

- Si calcoli inoltre il valore di g da ognuna delle otto misure di L vs. T , con il suo errore dalla propagazione degli errori su L e T :

$$\sigma_g = g \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

e li si inserisca nella tabella.

quindi si calcoli la media dei valori di g così ottenuti e la sua deviazione standard.

NOTA: le deviazioni su g per diversi valori di L sono molto diverse (un fattore 5 circa tra $L \approx 20$ cm e $L \approx 100$ cm; si noti che la deviazione standard è dominata dall'errore su L). Quindi si deve eseguire una media pesata:

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{g_i}{\sigma_{g_i}^2}}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{\sigma_{g_i}^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{\sigma_{g_i}^2}}}$$

(b2)

Si discutano:

i valori di g a diversi L , in relazione anche allo spunto di riflessione menzionato sopra. il valore di $\langle g \rangle$, col suo errore, e lo si confronti con quello ottenuto dal coefficiente angolare. le differenze fra i due valori, con speciale attenzione alla differenza (se esiste) fra le deviazioni standard.

Esperienza n° 4 MISURA DI CALORE SPECIFICO

A disposizione:

1 bicchiere graduato
2 thermos (A e B)
2 termometri
1 cronometro
un corpo di massa m
(il valore della massa verrà comunicato in laboratorio)

Con questa quarta esperienza si vuole:

misurare il calore specifico del corpo di massa m .

Introduzione

L'esperienza consiste nel misurare la capacità termica C ed il calore specifico c di un sistema di massa m misurando la variazione di temperatura di un sistema di capacità termica nota quando viene posto a contatto con il sistema.

Ricordiamo le relazioni:

$$Q = C \Delta T \text{ [J];} \quad C = cm \text{ [J/K];} \quad c = \frac{Q}{m \Delta T} \text{ [J/(kg·K)]}$$

In particolare si misura la variazione di temperatura di una quantità nota di acqua, a temperatura $\approx$ ambiente, nella quale viene immerso un corpo di massa nota a temperatura maggiore. Le due temperature iniziali vengono opportunamente misurate.

Chiamiamo il thermos "calorimetro". Anche questo contribuisce al bilancio energetico. Il suo contributo si descrive per mezzo del suo *equivalente in acqua*.

Il calorimetro, anch'esso inizialmente a temperatura ambiente in equilibrio con l'acqua contenuta, assorbe una parte del calore ceduto dal corpo caldo. Il suo *equivalente in acqua* è quella massa di acqua che assorbirebbe lo stesso calore subendo la medesima variazione di temperatura.

La misura

a) equivalente in acqua del calorimetro

- Si misura una quantità di acqua a temperatura ambiente (circa 150 cm³) con il bicchiere graduato e la si introduce nel thermos A (il nostro calorimetro).

Si assuma un errore di lettura di volume pari a 2 cm³

- Si prepara un'altra quantità di acqua (circa 150 cm³) calda nel secondo thermos (B).

- Si misura la temperatura dell'acqua dei due recipienti con due termometri, ogni minuto (circa), per 10 minuti.

NOTA 1: si misuri la temperatura la prima volta e si faccia partire il cronometro (prime due misure a $t = 0$ s). Quindi ogni minuto (circa) si misurino le temperature, avendo cura di segnare il tempo relativo ad ogni misura. Si noti che data la lentezza della variazione delle temperature, sarà sufficiente riportare i tempi approssimati al più vicino secondo.

- Allo scadere dell'undicesimo minuto (circa) si versa l'acqua calda nel calorimetro (si riporti la misura dell'istante di mescolamento t^m).

- Si misura la temperatura nel calorimetro ogni minuto per 10 minuti.

Si compila la seguente tabella (usiamo il pedice 1 per indicare la temperatura più bassa, 2 per quella più alta e 3 per quella dopo il mescolamento)

misura dell'equivalente in acqua				
	prima del	mescolamento	dopo il	mescolamento
tempi (min)	T_1	T_2	tempi (min)	T_3
≈ 1			t^m	T^m_2
.			≈ 12	
≈ 10			.	
t^m	T^m_1	T^m_2	20	

NOTA 2 I valori delle temperature al mescolamento (caselle ombreggiate nella tabella), T^m_i ($i=1,2,3$), non sono noti in quanto non è possibile misurarli all'istante del mescolamento. Vedremo che sarà possibile determinarli estrapolando i dati in nostro possesso. Inoltre si riportano i valori dei volumi di acqua con i loro errori:

$$V_1 = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{ cm}^3; \quad V_2 = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{ cm}^3$$

NOTA 3: il valore dell'errore su V è una stima, e si basa principalmente sull'errore di lettura.

b) misura del calore specifico del corpo metallico

- Si misura una quantità di acqua a temperatura ambiente (circa 150 cm³) con il bicchiere graduato e la si introduce nel thermos A (calorimetro) .

Si assuma un errore di lettura di volume pari a 2 cm³

- Si misura una quantità di acqua calda (circa 150 cm³), la si introduce in un secondo thermos, e vi si immerge il corpo metallico di massa m nota.

- Si misura la temperatura dell'acqua dei due recipienti con due termometri, ogni minuto (circa), per 10 minuti.

NOTA 4: la procedura è la stessa di quella descritta sopra

- Allo scadere dell'undicesimo minuto (circa) si immerge il corpo metallico nel calorimetro (si riporti la misura dell'istante di mescolamento t^m).

- Si misura la temperatura nel calorimetro ogni minuto per 10 minuti.

Si compila un'altra tabella:

misura del calore specifico				
	prima del	mescolamento	dopo il	mescolamento
tempi (min)	T_1	T_2	tempi (min)	T_3
≈ 1			t^m	T^m_2
.			≈ 12	
≈ 10			.	
t^m	T^m_1	T^m_2	20	

$$V_1 = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{ cm}^3; \quad V_2 = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots \text{ cm}^3$$

NOTA 5: vedi note 2 e 3.

L'analisi dei dati

Assumiamo in questa esperienza il calore specifico e la densità dell'acqua costanti e pari rispettivamente a $c = 1.000 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 4.186 \text{ J/g}^\circ\text{C}$, $\rho = 1.000 \text{ g/cm}^3$. Si consideri l'errore su c e su ρ trascurabile.

Masse di acqua

Si calcolano le quattro masse di acqua coinvolte nelle due fasi dell'esperimento (e le si riportano nella tabella di pag. 6):

$$m = \rho V \pm \rho \sigma_V \quad (i = 1, 2)$$

a) equivalente in acqua m_c :

Il bilancio energetico si scrive:

$$(m_1 + m_c)(T_3^m - T_1^m) + m_2(T_3^m - T_2^m) = 0$$

dove T_3^m è la temperatura immediatamente dopo il mescolamento, T_1^m e T_2^m le due temperature, rispettivamente fredda e calda, immediatamente prima del mescolamento, m_1 ed m_2 le due masse di acqua e m_c l'equivalente in acqua del calorimetro.

$$m_c = m_2 \frac{T_2^m - T_3^m}{T_3^m - T_1^m} - m_1 \quad (1)$$

oppure, introducendo: $\chi = \frac{T_2^m - T_3^m}{T_3^m - T_1^m}$ (>0 in quanto $T_2^m > T_3^m > T_1^m$)

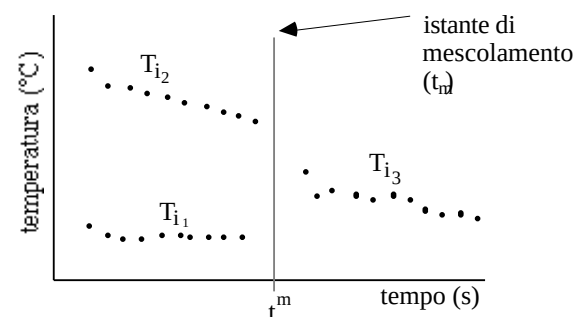
si ottiene

$$m_c = m_2 \chi - m_1$$

I valori delle tre temperature T_i^m ($i=1,2,3$) si ottengono dall'estrapolazione lineare all'istante del mescolamento t^m delle temperature misurate prima del mescolamento e di quella misurata dopo il mescolamento.

PROCEDURA DI ESTRAPOLAZIONE

Si graficano i valori riportati nelle tabelle precedenti:



Si procede al calcolo della regressione lineare delle tre rette che meglio approssimano l'andamento delle tre temperature. Per tutte e tre le rette si calcolano i coefficienti a e b e le loro deviazioni standard. Si avrà cura di scartare quei punti che, essendo troppo vicini all'istante del versamento dell'acqua (per T_1 e T_2) o all'istante di mescolamento (per T_3), si discostano troppo dall'andamento lineare.

IMPORTANTE:

Si riportano su grafico le tre rette e si verifica la "plausibilità" dei risultati.

I valori delle tre temperature T_i^m al tempo di mescolamento t^m si estrapolano:

$$T_i^m = a_i + b_i t^m \quad (i=1,2,3)$$

e l'errore sarà dato dalla propagazione degli errori:

$$\sigma_{T_i^m} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_i^m}{\partial a_i} \sigma_{a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_i^m}{\partial b_i} \sigma_{b_i}\right)^2} = \sqrt{\sigma_{a_i}^2 + (t^m)^2 \sigma_{b_i}^2}$$

b) calore specifico

Analogamente a quanto visto prima il bilancio energetico è descritto da:

$$c(m_1 + m_c)(T_3^m - T_1^m) + m_c x(T_3^m - T_2^m) = 0$$

$$c_x = c \frac{(m_1 + m_c)}{m} \frac{T_3^m - T_1^m}{T_2^m - T_3^m}$$

oppure:

$$c_x = c \frac{(m_1 + m_c)}{m} \theta \quad (2)$$

dove

$$\theta = \frac{T_3^m - T_1^m}{T_2^m - T_3^m}$$

E dove le temperature al mescolamento sono ottenute con una procedura di estrapolazione identica a quella descritta prima (si seguano le medesime istruzioni).

Prima di procedere oltre è conveniente riassumere i risultati così ottenuti in una tabella del genere:

	(a) equivalente in acqua		(b) calore specifico	
	valore	σ	valore	σ
m_1				
m_2				
T_1^m				
T_2^m				
T_3^m				
	$\chi = \dots\dots\dots \pm \dots\dots ? \dots\dots$		$\theta = \dots\dots\dots \pm \dots\dots ? \dots\dots$	
	$m_c = \dots\dots\dots \pm \dots\dots ? \dots\dots$		$c_x = \dots\dots\dots \pm \dots\dots ? \dots\dots$	

Vogliamo calcolare l'errore sulla nostra misura di calore specifico. Per fare ciò dobbiamo utilizzare la propagazione degli errori applicata alla relazione (2). Vediamo quindi che ci servono gli errori su m_c [relazione (1)] e su χ e θ . Cominciamo da questi ultimi:

$$\sigma_\chi = \sqrt{\left(\frac{\partial \chi}{\partial T_1^m} \sigma_{T_1^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial T_2^m} \sigma_{T_2^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial T_3^m} \sigma_{T_3^m}\right)^2}$$

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial T_1^m} \sigma_{T_1^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_2^m} \sigma_{T_2^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial T_3^m} \sigma_{T_3^m}\right)^2}$$

si ha:

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_1^m} = \frac{\chi}{T_3^m - T_1^m} \quad \frac{\partial \theta}{\partial T_1^m} = \frac{-1}{T_2^m - T_3^m}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_2^m} = \frac{1}{T_3^m - T_1^m} \quad \frac{\partial \theta}{\partial T_2^m} = \frac{-\theta}{T_2^m - T_3^m}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_3^m} = -\frac{1 + \chi}{T_3^m - T_1^m} \quad \frac{\partial \theta}{\partial T_3^m} = \frac{1 + \theta}{T_2^m - T_3^m}$$

Da cui si ricava l'errore su χ e θ (aggiungerlo nella tavola precedente), sull'equivalente in acqua del calorimetro:

$$m_c = m_2 \chi - m_1$$

$$\sigma_{m_c} = \sqrt{\left(\frac{\partial m_c}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_c}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_c}{\partial \chi} \sigma_\chi\right)^2}$$

e sul calore specifico

$$c_x = \frac{c}{m} (m_1 + m_c) \theta$$

$$\sigma_{m_c} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_x}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial m_c} \sigma_{m_c}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial \theta} \sigma_\theta\right)^2}$$

dove si sono considerati trascurabili gli errori su m e su c .

Quindi:

$$m_c = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots g$$

$$c_x = \dots\dots\dots \pm \dots\dots\dots J/g^\circ C$$

Si discuta il valore di calore specifico trovato, con il suo errore.

Si facciano considerazioni sugli errori, ad esempio:

- cosa comporta aver solo stimato alcuni errori?

- Il peso di questi errori sul risultato finale è significativo?

- Per quale motivo non ci siamo occupati degli errori di lettura su T?

Si commenti anche la procedura usata per la estrapolazione dei valori di temperatura al mescolamento.

Esperienza n° 5 MISURA DELLA COSTANTE DI TEMPO DI UN CIRCUITO RC

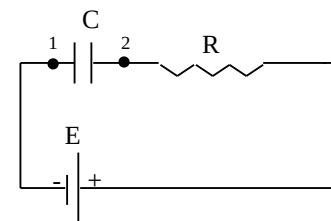
A disposizione:

un voltmetro digitale
una basetta precablata con interruttori
un cronometro
un alimentatore

Con questa quarta esperienza si vuole:

misurare la costante di tempo della scarica di un condensatore.

Introduzione



$$V(t) = V_2 - V_1$$

$$E = Ri + V(t)$$

$$i = \frac{dq(t)}{dt}; \quad V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\text{Legge di Ohm: } R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \text{ (carica)}$$

$$\Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ (scarica)}$$

Noi studiamo oggi la scarica:

$$q(t) = E_0 C e^{-t/\tau} \rightarrow V(t) = E_0 e^{-t/\tau}$$

$$\text{dove } E_0 = V(t=0); \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau} q \Rightarrow -\frac{R}{\tau} q + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \tau = RC \text{ (}\tau \text{ = costante di tempo)}$$

Quindi, da $V(t) = E_0 e^{-t/\tau}$

possiamo scrivere

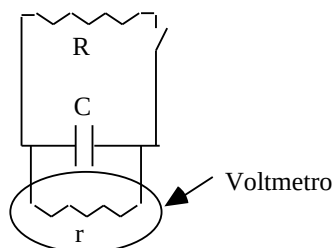
$$\ln V = \ln E_0 - \frac{t}{\tau}$$

cioè: $y = a + bt$

dove: $y = \ln V$; $a = \ln E_0$; $b = -\frac{1}{\tau}$

Una volta caricato il condensatore si disinserisce l'alimentatore (con l'apposito interruttore).

La resistenza R esterna può essere inserita o meno per mezzo di un altro interruttore. La resistenza interna r del voltmetro va invece sempre considerata:



Nel caso R sia inserita, le due resistenze sono in **parallelo**:

$$R_{eq} = \frac{Rr}{R + r}$$

Procedura

Si eseguono due serie di misure, la prima con solo la resistenza interna del voltmetro, la seconda con la resistenza esterna inserita.

La capacità C è data, le due resistenze sono incognite.

In entrambe i casi:

- Si inserisce il Voltmetro in parallelo a C
- Si carica il condensatore (a circa 20 V)

- Si apre l'interruttore che esclude l'alimentatore
- Si fa partire il cronometro e contemporaneamente si misura la tensione
- Si esegue una misura di V ogni minuto circa (per $\approx 10-12$ min con solo r e per 6-7 min con R inserita, ma questi valori possono variare a seconda dello strumento usato)

NOTA: l'errore sul tempo è trascurabile (...perchè?)

- Si costruisce una tabella: t (s) V (V) $\ln V$
- Si grafica $\ln V$ vs. t

Si calcolano a , σ_a , b , σ_b

Propagazione degli errori su τ :

$$\tau = -\frac{1}{b}; \quad \sigma_{\tau}^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \Rightarrow \sigma_{\tau} = \frac{\sigma_b}{b^2}; \quad \tau = -\frac{1}{b} \pm \frac{\sigma_b}{b^2}$$

Calcolo di r e propagazione degli errori su r :

$$r = \frac{\tau}{C}$$

L'errore percentuale su C è $\Delta C/C = 0.02$. L'errore su b non è indipendente da quello su C (C è misurato con una data incertezza e questa influenzerà il calcolo di b). Non è corretto quindi usare la propagazione degli errori statistici, che assume errori scorrelati. Come approssimazione, consapevoli di sovrastimare l'errore finale, possiamo utilizzare la propagazione degli errori che, considerando le possibili correlazioni, ci fornisce l'errore "massimo":

$$\Delta r = \left| \frac{\partial r}{\partial \tau} \right| \Delta \tau + \left| \frac{\partial r}{\partial C} \right| \Delta C = r \left(\left| \frac{\partial \tau}{\tau} \right| + \left| \frac{\partial C}{C} \right| \right) = \frac{\tau}{C} \left(\frac{\sigma_b}{b} + \frac{\Delta C}{C} \right)$$

Calcolo di R e propagazione degli errori su R :

$$R_{eq} = \frac{Rr}{R + r} \Rightarrow R = \frac{rR_{eq}}{r - R_{eq}}; \quad R_{eq} = \frac{\tau}{C}$$

inoltre, analogamente a quanto detto prima:

$$\Delta_{\text{Req}} = \left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial \tau} \right| \Delta_{\tau} + \left| \frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial C} \right| \Delta_C = R_{\text{eq}} \left(\left| \frac{\partial \tau}{\tau} \right| + \left| \frac{\partial C}{C} \right| \right) = \frac{\tau}{C} \left(\frac{\sigma_b}{b} + \frac{\Delta C}{C} \right)$$

$$\Delta_R = \left| \frac{\partial R}{\partial r} \right| \Delta_r + \left| \frac{\partial R}{\partial R_{\text{eq}}} \right| \Delta_{\text{Req}}$$

$$\left| \frac{\partial R}{\partial r} \right| = \left| \frac{R_{\text{eq}}}{r - R_{\text{eq}}} \right|^2 \quad \left| \frac{\partial R}{\partial R_{\text{eq}}} \right| = \left| \frac{r}{r - R_{\text{eq}}} \right|^2$$

Calcolo di E_0 , e propagazione degli errori su E_0 (entrambe le misure)

$$a = \ln E_0; \quad E_0 = e^a; \quad \sigma_{E_0}^2 = \left(\frac{\partial E_0}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 \rightarrow \sigma_{E_0} = E_0 \sigma_a$$

Risultati

solo r: con la resistenza esterna:

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) τ | 4) τ |
| 2) E_0 | 5) E_0 |
| 3) r | 6) R |

7) commento (breve) sui valori di E_0 (rispetto al valore della fem usata per la carica)

8) commento (breve) sui due valori di τ trovati.

Esperienza n° 6 MISURA DELLA LUNGHEZZA D'ONDA D'UN FASCIO LASER

A disposizione:

- un laser completo di alimentatore
- un reticolo di diffrazione
- un metro a nastro
- un foglio di carta millimetrata

Con questa quarta esperienza si vuole:

misurare la lunghezza d'onda incognita λ di un laser per mezzo di un reticolo di diffrazione.

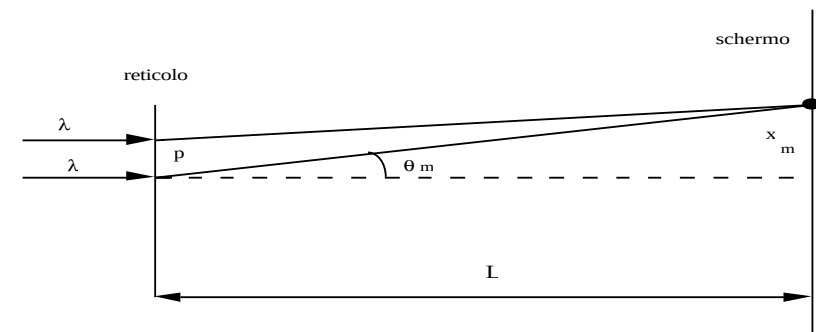
Breve richiamo di fisica

Un reticolo di diffrazione è un insieme di tante fenditure parallele, equidistanti e della stessa larghezza; la distanza tra due fenditure successive, "p" viene detta il passo del reticolo.

La teoria del reticolo stabilisce l'esistenza di massimi principali nella distribuzione dell'intensità della luce diffratta e fornisce la seguente relazione tra il passo p, l'angolo di diffrazione θ e la lunghezza d'onda della luce incidente λ (vedi figura per la definizione della geometria sperimentale):

$$p \sin \theta = m \lambda \quad (1)$$

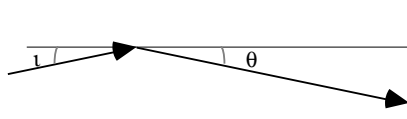
in cui m è l'ordine del massimo.



Schema dell'esperienza. Le proporzioni non sono rispettate: in particolare p e x_m sono molto piu' piccole di quanto mostrato. Per comodita' viene mostrata la diffrazione soltanto da due fenditure.

La relazione (1), valida per incidenza normale, si generalizza facilmente per un angolo di incidenza i qualunque:

$$p(\sin\theta + \sin i) = m\lambda \quad (2)$$



Esplicitando rispetto a $\sin\theta$:

$$\sin\theta = m\lambda/p - \sin i \quad (2a)$$

Cioè fra $\sin\theta$ e m sussiste una relazione lineare, il cui coefficiente angolare è λ/p e la cui intercetta è $-\sin i$.

Si vogliono misurare quindi le posizioni angolari dei massimi di diversi ordini. La misura è effettuata in condizioni di incidenza normale: il valore di $\sin i$ fornisce, quindi, una indicazione diretta della bontà dell'allineamento.

L'esperimento: introduzione

La sorgente di luce monocromatica di lunghezza d'onda incognita λ è costituita da un laser He-Ne; il fascio viene fatto incidere normalmente sul reticolo montato solidalmente con il laser.

Si noti:

- Il laser è connesso all'alimentatore per mezzo di un cavetto: se il cavetto è staccato non accendere il laser per nessun motivo, pena la distruzione dell'alimentatore.
- Il laser è fornito di un otturatore che si aziona per mezzo di una levetta posta sopra il foro di uscita del fascio: nei periodi di tempo in cui non si effettuano misure è buona norma tenere l'otturatore chiuso (lasciando il laser acceso).
- Non guardare mai direttamente il fascetto e porre la massima attenzione a non "sparare" il fascetto addosso ai vostri colleghi.

L'esperimento: dettagli

Il banco di misura sarà montato dal personale del laboratorio: si dovrà soltanto accendere il laser, allineare il reticolo e preparare lo schermo secondo quanto qui riportato.

- Il reticolo: si tratta di un reticolo Leybold con montaggio a diapositiva e con un numero di fenditure $N=80 \text{ cm}^{-1}$ e cioè un passo $p=1/N=1.25 \times 10^{-2} \text{ cm}$.

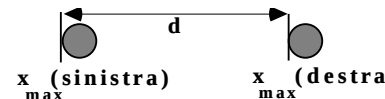
- La condizione di incidenza normale si raggiunge per mezzo del cosiddetto "autoallineamento": il reticolo viene ruotato finché la riflessione all'indietro del massimo centrale non scompare nel forellino di uscita del laser; la precisione stimata di questo metodo è dell'ordine di 1 grado o frazione di grado sessagesimale.

- Lo schermo viene posto ad una distanza L dal reticolo dell'ordine di 3 m (misurare con il metro a nastro).

- Per facilitare la misura della posizione dei massimi e per minimizzare eventuali errori di parallasse, la lettura della posizione dei massimi si effettua utilizzando un foglio di carta millimetrata fissato sullo schermo con del nastro adesivo.

Procedura

Si annota con una matita la posizione del bordo di sinistra (o destra) dei massimi di destra e di sinistra del medesimo ordine e si ripete per tutti gli ordini visibili (di solito 7) facendo bene attenzione a non muovere lo schermo durante l'operazione.



Viene tolto il foglio dallo schermo e vengono misurate ed annotate le distanze "d" fra i bordi relativi ai massimi dello stesso ordine.

La posizione del massimo di ciascun ordine relativamente al massimo centrale sarà data da $d/2$.

Viene costruita una tabella di dati:

m	$x_{\max} \equiv d/2$
---	-----------------------

Prima di passare all'analisi dati, notiamo che

$$x_{\max}/L \ll 1$$

quindi è lecito approssimare la tangente (e quindi il seno) dell'angolo θ con l'angolo stesso:

$$\tan\theta_{\max} = x_{\max}/L \approx \sin\theta_{\max} \approx \theta_{\max}$$

Si riporti su grafico $\frac{x_m}{L}$ vs. m.

Analisi dei dati

Per calcolare i coefficienti della relazione lineare che meglio approssima i dati sperimentali verrà utilizzato il metodo dei minimi quadrati.

Si ricorda:

$$y_i = a + bx_i$$

nel nostro caso:

$$x_i = m; \quad y_i = \sin\theta_i \approx \theta_i \approx \frac{x_m}{L} \quad a = -\sin i; \quad b = \frac{\lambda}{p}$$

Si calcolino i coefficienti (e le loro incertezze sperimentali) della retta con il metodo dei minimi quadrati (si riporti la retta così trovata sul grafico).

Converrà quindi compilare la seguente tabella:

m	senθ	m senθ	m ²	sen ² θ
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
S _m	S _{senθ}	S _{m senθ}	S _{m²}	S _{sen²θ}

Si ricordi che nei calcoli intermedi è conveniente utilizzare tutte le cifre significative disponibili. Il numero corretto di cifre significative verrà utilizzato sui risultati finali, e dipenderà dal valore dell'errore.

Il valore di λ si ricava da quello del coefficiente angolare (l'errore su p viene infatti considerato trascurabile):

$$\lambda = b p \quad \Delta\lambda = p \Delta b$$

Risultati

- λ
- $\sin i$, (si commenti questo valore).
- L'errore su L e quello sulle misure θ_i hanno lo stesso effetto sui risultati? [Commentare](#) (massimo 5 righe).

APPENDICE: formule

Questa appendice fornisce un aiuto al calcolo di alcune variabili statistiche fondamentali qualora non si abbia a disposizione un calcolatore tascabile pre-programmato allo scopo. Le medesime relazioni possono anche essere usate ove si volesse scrivere un programma al computer per calcolare tali variabili.

Definizione

Si supponga di avere eseguito N misure di una variabile che chiamiamo genericamente ξ . Definiamo:

$$S_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

Si noti che S_ξ può essere costruita nel calcolatore tascabile inserendo i dati.

Media

$$\langle \xi \rangle = \frac{S_\xi}{N}$$

Varianza

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{N} S_{\xi^2} - \left(\frac{1}{N} S_\xi \right)^2$$

Coefficiente di correlazione r (tra x e y):

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(NS_{x^2} - S_x^2)(NS_{y^2} - S_y^2)}}$$

Regressione lineare

$$(y_i = a + bx_i)$$

$$a \pm \sigma_a = \frac{S_y S_{x^2} - S_x S_{xy}}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{S_{x^2}}{\Delta}} \sigma$$

$$b \pm \sigma_b = \frac{NS_{xy} - S_y S_x}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \sigma$$

$$\Delta = NS_{x^2} - S_x^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i)^2}$$