



corso di Laurea in Scienze Biologiche

Note integrative per il corso di Laboratorio di Fisica

Misure del periodo di un pendolo **(bozza)**

a.a. 1999-00

Livio Narici

N.B. Questa è una bozza, suggerimenti e segnalazioni di errori saranno graditi

Molti degli strumenti di analisi dati che sono stati introdotti nelle lezioni precedenti verranno ora utilizzati per studiare il comportamento di un pendolo.

L'idea è quella di procedere in modo graduale, e di "scoprire", per mezzo di misure ed analisi adeguate, che tipo di relazione governa il moto di un pendolo. Per motivi di spazio e di tempo, ovviamente, questa ricerca sarà solo parziale e dovremo dare per acquisite cose che acquisite non sarebbero. In questi casi, comunque, si cercherà di sottolineare ciò che si dovrebbe/potrebbe fare se si avesse più spazio e tempo.

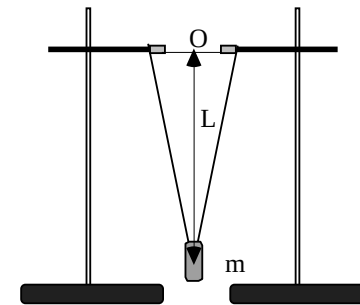


FIGURA 1

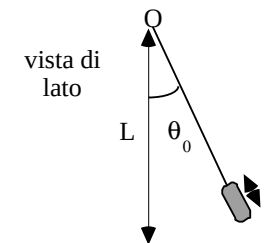


FIGURA 2

Il pendolo viene montato come illustrato in figura 1 (dove la sospensione bifilare serve a far oscillare il pendolo su un piano fisso nello spazio). La massa m viene quindi spostata dalla sua posizione di equilibrio di un angolo θ_0 e lasciata oscillare (Fig. 2).

Quale relazione determina il periodo del moto?

Per prima cosa ci poniamo il problema di capire quali siano i parametri del nostro sistema che possono influire sul periodo. Ad esempio:

- a) la lunghezza del filo L
- b) la massa del filo μ
- c) la massa del peso attaccato al filo m
- d) l'ampiezza di oscillazione iniziale θ_0
- c) la dimensione del peso attaccato al filo (che assumiamo essere un cilindro di lunghezza $2d$)
- e) eventuali attriti (alla sospensione, dell'aria)

Con argomenti intuitivi escluderemo alcuni di questi parametri. Quindi procederemo a misurare il periodo delle oscillazioni variando di volta in volta un parametro e osservando se tale variazione influisca o meno sul periodo.

Si assuma di aver utilizzato un filo assai leggero (un filo di nylon da pesca di minimo calibro, o un filo sottile da cucito) in modo da poter assumere che la sua massa μ sia largamente trascurabile rispetto alla massa m del pendolo (assumiamo $\mu/m \ll 0.01$). Escludiamo quindi (b) dalla lista. Avendo più tempo e spazio avremmo potuto fare delle prove, ad esempio utilizzando due pendoli identici tranne che per il filo uno di massa maggiore, per esempio doppia, dell'altro. Assumiamo di averlo fatto, con la stessa tecnica che descriveremo per gli altri parametri, e che, nell'approssimazione μ/m menzionata prima, la massa μ non influisca sul periodo. La dipendenza dall'attrito di T è più delicata da trattare. Per semplicità assumiamo che non ve ne sia (e nel nostro caso è una assunzione valida). Quali potrebbero essere delle misure che ci permettano di sostanziare questa assunzione? La stessa logica che descriveremo in dettaglio più avanti potrà eventualmente essere usata per studiare il problema dell'attrito. Ritourneremo in seguito su questo problema. Della nostra lista rimangono quindi:

- a) la lunghezza del filo L
- c) la massa del peso attaccato al filo m
- d) l'ampiezza di oscillazione iniziale θ_0
- e) la dimensione del peso attaccato al filo

La misura del periodo, procedura.

Il moto del pendolo è descritto dalla sola variabile θ .

Definiamo per prima cosa il periodo:

Il periodo è il tempo che intercorre tra un istante t_1 in cui il pendolo ha posizione θ_1 e velocità V_1 e il successivo istante t_2 in cui $\theta_2 = \theta_1$ e $V_2 = V_1$.

Dobbiamo scegliere quindi le posizioni θ_1 e θ_2 più facili da individuare. Una scelta opportuna (non l'unica, ritorneremo su questo punto) è quella di una delle posizioni in cui il pendolo inverte la velocità (cioè in cui ha velocità $V = 0$). Il pendolo passa per una di quelle posizioni (dove, tra l'altro, l'elongazione θ è massima) proprio ogni periodo. Decidiamo quindi di misurare il tempo intercorso tra due successivi passaggi. La sensibilità del cronometro è certamente piccola (nel nostro caso un centesimo di secondo). L'errore che si commette nel determinare l'inizio e la fine di un periodo (t_1 e t_2), chiamiamolo ϵ_t , è certamente maggiore. Vedremo che si lo può diminuire molto misurando la durata di un elevato numero di periodi consecutivi e assumendo che siano tutti della stessa lunghezza. In questo caso l'incertezza sulla misura del singolo periodo ϵ_t si ricava dall'incertezza relativa alla misura dell'istante iniziale e finale dividendo per il numero di periodi.

In ogni caso è quindi importante conoscere il valore di ϵ_t .

Ripetendo molte volte la misura di un singolo periodo e assumendo una distribuzione gaussiana delle misure con un errore dominante dato da ϵ_t , la deviazione standard σ_t di tale distribuzione fornisce una misura statistica dell'incertezza con la quale misuriamo il periodo (cioè $\epsilon_t \equiv \sigma_t$).

Prima di porre $\epsilon_t \equiv \sigma_t$ si deve quindi verificare se la distribuzione delle misure della durata del singolo periodo sia o meno gaussiana.

La lunghezza L del pendolo

Montiamo il pendolo con $L \approx 30$ cm e misuriamo L con il metro a nastro. Dobbiamo ora stimare o, se possibile, calcolare l'errore su L .

L è la proiezione verticale del filo dal punto in cui questo lascia il supporto di sospensione al centro del cilindretto che costituisce la massa del pendolo (vedi figura 1). La misura quindi consta di due misure separate: una della lunghezza del cilindro, la seconda della distanza tra la sommità di questo e il punto 'O' (vedi figure 1 e 2). Il modo più corretto di calcolare gli errori su queste due distanze è quello di ripetere più volte le misure (possibilmente persone diverse, in modo da avere misure realmente indipendenti), di calcolare media e deviazione standard. Questa non potrà che essere maggiore di alcune volte l'errore di lettura del metro (che è di 1 mm), anche per la difficoltà della individuazione del punto 'O'.

L'errore sarà inoltre abbastanza indipendente da L , ed è quindi preferibile dedicare più tempo a misurarlo una volta piuttosto che misurarlo ad ogni misura con meno attenzione.

Aiutandoci con un righello, propriamente posizionato sul tavolo, scostiamo di $A \approx 15$ cm il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciamolo oscillare. Ovviamente anche A va misurato in quanto a questo è proporzionale θ_0 ($A = L \sin \theta_0$, in questo caso $\theta_0 \approx 30^\circ$). Si noti, comunque, che volendo determinare se da θ_0 (e quindi A) dipenda o meno il periodo T , faremo alcune misure con θ_0 molto diversi e la domanda che ci porremo è solo se T varia significativamente o meno. Ciò ci tranquillizza sulla precisione necessaria della misura di A : per ora sarà sufficiente una misura approssimata con un errore anche maggiore dell'errore di lettura del righello. Potremmo eventualmente ripetere la misura se necessario.

L'influenza di θ_0 , L ed m sul periodo

- Eseguiamo 130 misure di periodo con $\theta_0 \approx 30^\circ$.
- Ripetiamo per $\theta_0 \approx 10^\circ$.
- Ripetiamo per $\theta_0 \approx 3^\circ$. In quest'ultimo caso dovremmo utilizzare un $A \approx 1.5$ cm e ci potrebbero essere delle difficoltà nella misura corretta di 130 oscillazioni con un A così piccolo. Quindi per ottenere lo stesso θ_0 portiamo $L \approx 70$ cm e quindi utilizziamo $A \approx 4$ cm. Il risultato di quest'ultima misura sarà quindi confrontato con quello della seguente misura con θ_0 diverso:
- ripetiamo con $L \approx 70$ cm e $A \approx 35$ cm ($\theta_0 \approx 30^\circ$).

Per studiare l'effetto della massa del pendolo m sul periodo T ripetiamo una delle misure precedenti con una massa diversa:

- ripetiamo con $L = 30$ e $\theta_0 \approx 10^\circ$. Dal punto di vista sperimentale, per garantire la costanza degli altri parametri (principalmente L) nelle due misure con masse diverse, queste verranno eseguite una dietro l'altra, senza modificare nulla tranne m (cioè la misura con massa diversa verrà eseguita immediatamente dopo la seconda serie).

Ricapitolando:

serie	L (cm)	θ_0	massa
1	≈ 30	≈ 30	m_1 (acciaio)
2	≈ 30	≈ 10	m_1 (acciaio)
3	≈ 30	≈ 10	m_2 (alluminio)
4	≈ 70	≈ 3	m_1 (acciaio)
5	≈ 70	≈ 10	m_1 (acciaio)

In tal modo avremo due serie da confrontare (1-2) per osservare l'influenza di θ_0 a grandi angoli e due (4-5) per osservare l'influenza a angoli piccoli. Dal confronto (1-4) si potrà capire se T dipende da L o meno, e da quello (2-3) se dipende da m .

Le masse

Per modificare la massa potremmo semplicemente scegliere un cilindro più piccolo o più grande dello stesso materiale. Abbiamo comunque stabilito di trascurare i fenomeni di attrito anche con l'aria. Per precauzione in questo senso, e nella consapevolezza che la geometria della massa attaccata al filo modifica l'attrito con l'aria, scegliamo di lasciare invariata la geometria, ma di variare il materiale che nella 3° serie sarà alluminio invece di acciaio. In questo modo l'influenza dell'attrito, oltre ad essere assunta trascurabile, sarà praticamente la stessa in tutte le nostre misure. Qualche pignolo potrebbe obiettare che la diversa rugosità delle superfici di alluminio ed acciaio produrrà fenomeni di attrito diversi. Così come il diverso peso potrebbe far significativamente variare l'attrito alla sospensione. Giusto, questi effetti, comunque, si possono misurare con precisioni maggiori di quelle che otterremo.

Misuriamo le masse con una bilancia ed utilizziamo l'errore di lettura di questa (1 g nel nostro caso) come errore della misura (si ricorda che la densità dell'alluminio è minore di quella dell'acciaio per un fattore poco inferiore a tre).

Risultati.

$$L_{30} = 0.291 \pm 0.004 \text{ m}$$

$$L_{70} = 0.700 \pm 0.004 \text{ m}$$

$$m_1 \text{ (serie 1,2,4,5), di acciaio: } m_1 = 157 \pm 1 \text{ g}$$

$$m_2 \text{ (serie 3), di alluminio: } m_2 = 62 \pm 1 \text{ g}$$

TABELLA 1

serie 1 (L = 30 cm, $\theta_0 \approx 30^\circ$, m = 157 g):

1.11	1.17	1.25	1.03	1.02	1.07	1.14	1.07	1.17	1.06	1.09	1.14
1.15	1.14	1.14	1.09	1.15	1.10	1.04	1.16	1.13	1.10	1.11	1.17
1.07	1.07	1.13	1.15	1.12	1.06	1.11	1.07	1.06	1.11	1.12	1.21
1.03	1.05	1.19	1.14	1.15	1.03	1.13	1.16	1.15	1.16	1.10	1.14
1.09	1.05	1.15	1.06	1.15	1.12	1.11	1.13	1.18	1.17	1.10	1.15
1.06	1.22	1.09	1.13	1.04	1.04	1.13	1.11	1.13	1.13	1.11	1.12
1.19	1.18	1.07	1.10	1.12	1.07	1.12	1.09	1.11	1.07	1.13	1.16
1.21	1.02	1.09	1.03	1.11	1.13	1.09	1.15	1.16	1.17	1.09	1.16
1.18	1.11	1.09	1.10	1.20	1.13	1.06	1.16	1.13	1.03	1.23	1.21
1.09	1.13	1.13	1.14	1.05	1.15	1.13	1.19	1.13	1.10	1.19	
1.13	1.11	1.09	1.09	1.09	1.14	1.10	1.08	1.14	1.07	1.13	

serie 2 (L = 30 cm, $\theta_0 \approx 10^\circ$, m = 157 g):

1.17	1.11	1.12	1.15	1.11	1.09	1.11	1.13	1.08	1.13	1.10	1.13
1.02	1.12	1.06	1.12	1.15	1.14	1.23	1.11	1.08	1.13	1.12	1.10
1.10	1.07	1.01	1.06	1.07	1.13	1.06	1.17	1.09	1.03	1.09	1.10
1.09	1.20	1.07	1.01	1.06	1.08	1.15	1.07	1.10	1.20	1.03	1.03
1.06	1.09	1.03	0.97	1.13	1.14	1.09	1.09	1.09	1.11	1.06	1.13
1.08	1.08	1.09	1.07	1.17	1.10	1.05	1.13	1.13	1.09	1.10	1.09
1.07	1.07	1.08	1.10	1.09	1.03	1.13	1.10	1.11	1.12	1.16	1.13
1.09	1.15	1.11	1.17	1.15	1.04	1.13	1.10	1.11	1.11	1.05	1.13
1.15	1.09	1.12	1.06	1.11	1.12	1.03	1.09	1.10	1.06	1.13	1.10
1.09	1.13	1.09	1.13	1.12	1.13	1.07	1.12	1.06	1.08	1.10	
1.11	1.06	1.11	1.01	1.16	1.13	1.17	1.14	1.09	1.19	1.11	

serie 3 (L = 30 cm, $\theta_0 \approx 10^\circ$, m = 62 g):

1.08	1.11	1.13	1.12	1.06	1.03	1.08	1.11	1.17	1.11	1.07	1.05
1.10	1.06	1.09	1.07	1.06	1.07	1.15	1.07	1.05	1.11	1.11	1.07
1.07	1.01	1.06	1.11	1.11	1.12	1.14	1.12	1.13	1.09	1.12	1.10
1.15	1.13	1.11	0.98	1.16	1.08	1.14	1.07	1.06	1.11	1.10	1.10
1.19	1.07	1.17	1.11	1.05	1.10	1.07	1.04	1.10	1.16	1.09	1.11
1.13	1.09	1.06	1.13	1.09	1.08	1.10	1.08	1.14	1.17	1.01	1.13
1.13	1.07	1.09	1.04	1.13	1.10	1.10	1.11	1.04	1.11	1.17	1.15
1.09	1.06	1.03	0.99	1.09	1.13	1.19	1.12	1.07	1.04	1.11	1.16
1.07	1.07	1.13	1.13	1.05	1.07	1.04	1.09	1.04	1.14	1.03	1.04
1.07	1.03	1.07	1.13	1.12	1.09	1.08	1.13	1.07	1.10	1.13	
1.15	1.07	1.04	1.09	1.06	1.03	1.09	1.07	1.12	1.13	1.13	

serie 4 (L = 70 cm, $\theta_0 \approx 3^\circ$, m = 157 g):

1.68	1.65	1.62	1.70	1.63	1.75	1.76	1.69	1.65	1.70	1.59	1.72
1.67	1.61	1.68	1.67	1.71	1.61	1.71	1.73	1.58	1.63	1.65	1.69
1.72	1.69	1.68	1.68	1.66	1.67	1.70	1.60	1.76	1.66	1.63	1.61
1.72	1.72	1.77	1.70	1.69	1.71	1.82	1.69	1.69	1.65	1.73	1.61
1.73	1.73	1.77	1.68	1.62	1.79	1.68	1.78	1.66	1.79	1.77	1.73
1.74	1.69	1.76	1.67	1.75	1.67	1.66	1.70	1.72	1.77	1.70	1.74
1.66	1.69	1.64	1.77	1.65	1.74	1.63	1.63	1.67	1.63	1.62	1.75
1.73	1.69	1.72	1.59	1.77	1.67	1.67	1.73	1.74	1.60	1.69	1.73
1.67	1.70	1.69	1.69	1.63	1.67	1.69	1.64	1.67	1.69	1.75	1.67
1.69	1.67	1.70	1.62	1.75	1.70	1.69	1.69	1.71	1.66	1.69	
1.59	1.63	1.74	1.63	1.77	1.59	1.63	1.76	1.65	1.67	1.68	

serie 5 (L = 70 cm, $\theta_0 \approx 10^\circ$, m = 157 g):

1.70	1.71	1.72	1.73	1.69	1.71	1.66	1.63	1.73	1.68	1.72	1.65
1.68	1.69	1.64	1.71	1.65	1.71	1.68	1.69	1.63	1.70	1.73	1.69
1.72	1.68	1.70	1.68	1.68	1.69	1.61	1.72	1.67	1.76	1.62	1.70
1.68	1.66	1.68	1.67	1.63	1.68	1.73	1.70	1.74	1.74	1.68	1.73
1.72	1.69	1.73	1.62	1.62	1.77	1.59	1.77	1.61	1.65	1.64	1.76
1.72	1.80	1.62	1.67	1.70	1.77	1.69	1.64	1.76	1.73	1.71	1.68
1.70	1.68	1.64	1.72	1.74	1.77	1.69	1.63	1.64	1.63	1.70	1.73
1.67	1.67	1.83	1.68	1.77	1.70	1.69	1.65	1.69	1.65	1.65	1.74
1.74	1.73	1.71	1.71	1.66	1.72	1.69	1.76	1.71	1.69	1.67	1.74
1.71	1.73	1.59	1.65	1.64	1.72	1.67	1.72	1.60	1.70	1.65	
1.73	1.65	1.71	1.79	1.60	1.78	1.73	1.73	1.65	1.72	1.69	

TABELLA 2

Da una prima analisi dei dati otteniamo (vedi appendice 1):

serie	1	2	3	4	5	
L (cm)	29.1	29.1	29.1	70.0	70.0	
θ_0	30	10	10	3	10	
Punti	130	130	130	130	130	
massa (g)	157	157	62	157	157	
Media (s)	1.1179	1.1011	1.0938	1.6878	1.6930	
Deviazione St. (s)	0.047718	0.042303	0.040925	0.051020	0.046199	
Varianza (s^2)	0.0022770	0.0017895	0.0016748	0.0026031	0.0021343	
Err. sulla media (s)*		0.0041852	0.0037102	0.003589	0.0044748	0.0040519

TABELLA 3

* vedi nel seguito un importante commento su questo valore

Prime considerazioni

Vediamo che le cinque misure forniscono valori della media del periodo tutti diversi. Il nostro compito sarà stabilire ove possibile se tali differenze siano significative o meno, e quantificare questa significatività.

Cosa intendiamo per "significativo"? Tutte le misure di T sono fra loro diverse. Ma lo sarebbero anche se non si fosse cambiato nulla tra una misura e l'altra (si provi ad esempio a calcolare $\langle T \rangle$ delle due metà di una misura, utilizzando i primi e gli ultimi 65 dati di una stessa serie). Le incertezze sulla misura del tempo con il cronometro, infatti, impediscono che le misure medie siano uguali, come potremmo invece aspettarci misurando la stessa grandezza senza variare alcun parametro sperimentale in assenza di "errori casuali". Variando un parametro, ad esempio A (e quindi θ_0), e ripetendo la misura di T otterremo un valore diverso di $\langle T \rangle$, sia se la variazione di A apportasse una differenza nel valore vero di T, sia se, invece, il valore vero rimanesse immutato. In questo ultimo caso la differenza in $\langle T \rangle$ sarebbe imputabile alle sole "fluttuazioni statistiche" dovute agli errori citati prima.

Il problema si può affrontare e risolvere impiegando i test studiati. Infatti pur non potendo affermare con sicurezza se il valore vero sia mutato o no, questi ci permettono di dire con quale probabilità p_0 la differenza in T misurata possa essere dovuta a fluttuazioni statistiche. Ovviamente equivarrà ad affermare che vi è una probabilità $P=1-p_0$ che tale differenza NON sia dovuta a fluttuazioni statistiche, cioè sia dovuta ad una variazione del valore vero (escludendo possibili effetti di errori sistematici). Potremmo dire quindi che le due misure di T sono "significativamente diverse" (cioè relative a due valori veri diversi) se P è maggiore di un certo valore di soglia (o p_0 minore di un corrispondente valore).

Solitamente si sceglie $P>95\%$ ($p_0<5\%$). Nel descrivere i risultati il valore di P (più solitamente di p_0) va comunque dichiarato.

L'analisi dei dati

Normalità delle misure.

Preliminarmente dobbiamo sincerarci che le misure siano distribuite gaussianamente. Questa verifica inoltre ci consentirà di confrontare le differenze tra le medie con gli errori sulla media e di utilizzare gli strumenti che abbiamo imparato, necessari a questo. Per verificare la distribuzione dei nostri dati ci serviremo del test del χ^2 . A tal scopo sarà necessario costruire l'istogramma delle misure (un istogramma per ciascuna delle cinque serie) e confrontarlo con la distribuzione gaussiana costruita sulla base della media e della deviazione standard misurate.

Per costruire l'istogramma utilizziamo un'intervallo $\Delta T = 0.03$ s. Procediamo come segue: i) gli intervalli vengono scelti in modo da includere tutte le misure; e si impone che ogni misura al confine fra due intervalli appartenga sempre all'intervallo inferiore o superiore; ii) si scrivono gli estremi degli intervalli sulla prima colonna di una tabella; iii) si leggono le misure di una serie segnando una stanghetta in corrispondenza dell'intervallo nel quale cade ogni misura; iv) si contano le stanghette. Nel nostro caso gli istogrammi sono i seguenti (la prima colonna corrisponde al valor medio di ogni intervallo [$T_i = (T_{i \max} + T_{i \min}) / 2$]):

T_i	n_i (serie 1)	n_i (serie 2)	n_i (serie 3)	T_i	n_i (serie 4)	n_i (serie 5)
0.97	0	1	1	1.57	1	0
1.00	0	3	3	1.60	10	6
1.03	10	8	13	1.63	16	15
1.06	18	20	31	1.66	26	20
1.09	22	38	28	1.69	34	36
1.12	35	40	37	1.72	18	34
1.15	26	11	11	1.75	14	10
1.18	12	6	6	1.78	10	7
1.21	5	2	0	1.81	1	1
1.24	2	1	0	1.84	0	1

TABELLA 4

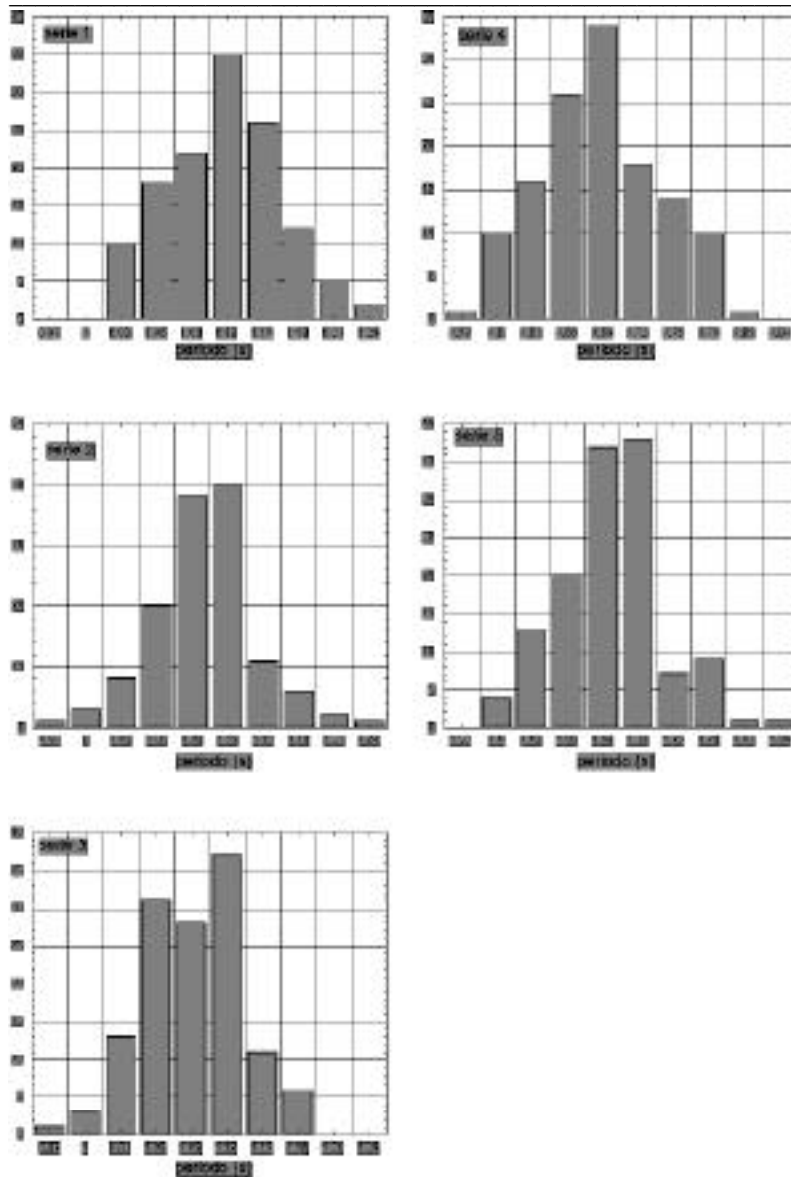


FIGURA 3

La tabella 4 e la figura 3 ci dicono quante volte un certo valore di T (o meglio un valore di T in un certo intervallo) è stato misurato. Ad esempio nella prima misura si è ottenuto per 22 volte un periodo T nell'intervallo 1.090 ± 0.015 s ($T_5 \pm \Delta T/2$).

Questo corrisponde ad una frequenza ($f = n_i/N$, dove N è il numero di misure eseguite) pari a $22/139 = 0.17$, frequenza che, per N grandi dovrebbe tendere alla probabilità.

Per calcolare il valore del χ^2 nei cinque casi, dobbiamo calcolare il valore teorico della probabilità attesa di ottenere una misura in ciascun intervallo. Moltiplicando questa per N otterremo il numero aspettato di misure in quell'intervallo.

Questa probabilità è data da:

$$\int_{T_{i \min}}^{T_{i \max}} f_{<T>\sigma}(T) dT$$

dove $f_{<T>\sigma}(T)$ è la gaussiana calcolata sulla base della media e della deviazione standard sperimentali. Come semplificazione, invece di integrare la $f_{<T>\sigma}(T)$ tra i due estremi di ciascuno degli M intervalli ($M=10$ nel nostro caso), possiamo calcolarla nel punto centrale e moltiplicare per l'ampiezza dell'intervallo ΔT (l'approssimazione è buona come si può verificare svolgendo i conti in entrambi i modi). Questa viene poi moltiplicata per il numero di misure eseguito N ottenendo il valore aspettato per ciascun intervallo:

$$E_{T_i} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(T_i - \langle T \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\} \Delta T N \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

dove: T_i è il periodo "centrale" dell'intervallo i -esimo, ΔT la larghezza di tale intervallo (nel nostro caso $\Delta T = 0.03$ s), N il numero totale di periodi misurati (nel nostro caso $N = 139$); si noti infine che " i " varia da 1 a $M = 10 \equiv$ numero di intervalli.

Si calcola quindi il valore:

$$\frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$$

(dove O_{T_i} è il valore osservato in ciascun intervallo, cioè n_i dato in tabella 4), la cui somma su tutti gli intervalli è il χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$$

i	T_i	O_{T_i}	E_{T_i}	$\frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}}$
1	0.970	0	0.26744	0.26744
2	1.00	0	1.5405	1.5405
3	1.03	10	5.9767	2.7084
4	1.06	18	15.617	0.36374
5	1.09	22	27.483	1.0938
6	1.12	35	32.574	0.18067
7	1.15	26	26.003	3.9722e-07
8	1.18	12	13.981	0.28058
9	1.21	5	5.0625	0.00077088
10	1.24	2	1.2347	0.47443
				$\sum_{i=1}^M \frac{(O_{T_i} - E_{T_i})^2}{E_{T_i}} = 6.91$

TABELLA 5

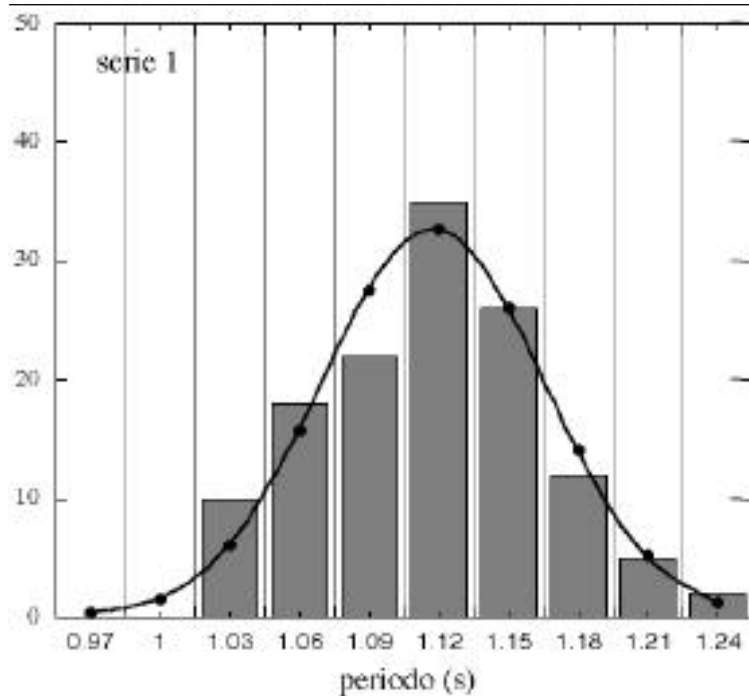


FIGURA 4

Per ottenere il χ^2 ridotto questo valore va diviso per il numero di gradi di libertà GL. Nel nostro caso i vincoli legati alla costruzione della nostra gaussiana sono 3 (N , $\langle T \rangle$, σ), quindi $GL = M - 3$ ($=7$ nel nostro caso).

Dal valore di χ^2/GL e da GL si ricava dalle tavole del χ^2 (appendice D del Taylor) la probabilità di ottenere una distribuzione che, pur essendo gaussiana, si discosta per le fluttuazioni statistiche dalla gaussiana teorica come o più della nostra.

Costruiamo per ogni serie la tabella 5 (qui riportata solo per la prima serie di misure). La sovrapposizione dell'istogramma sperimentale con la curva teorica così calcolata aiuta a comprendere il significato di questo test (anche in questo caso si riporta tal grafico per la prima serie di misure, figura 4)

Il χ^2 ridotto è quindi pari a $6.91/7 = 0.99$. Dalle tavole si trova che la probabilità di ottenere un valore di χ^2 peggiore di questo per una distribuzione gaussiana, a causa di una fluttuazione statistica è pari al 43%. La soglia che normalmente viene scelta è il 5%. In questo caso, quindi, possiamo dire che accettiamo la "gaussianità" delle nostre misure con $p=0.43$.

Ripetendo per le altre tre serie di misure e ricapitolando i risultati in una tabella si ha:

serie	1	2	3	4	5
χ_0^2	6.91	11.75	8.11	7.74	9.82
χ_0^2/GL	0.99	1.68	1.16	1.10	1.40
$P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$	0.43	0.10	0.33	0.36	0.20
$p(\chi^2 < \chi_0^2)$	0.57	0.90	0.67	0.64	0.80

TABELLA 6

Con la soglia del 5% tutte le misure possono quindi accettarsi come gaussiane.

1° RISULTATO: le distribuzioni delle cinque serie non sono significativamente diverse dalla distribuzione gaussiana ($0.10 < P < 0.43$)

L'incertezza nella misura dei tempi.

Una volta stabilito che le misure seguono una distribuzione gaussiana, possiamo stimare l'indeterminazione della misura del singolo periodo, cioè l'errore associabile ad ogni misura temporale ϵ_i . Questo, infatti, sarà la causa della "larghezza" della distribuzione, il cui σ ne sarà la sua miglior stima. Vediamo dai nostri risultati (tabella 2) che il σ delle cinque serie di misure è 0.05 s tranne che per la seconda e terza serie per la quale è 0.04 s. Questo errore ci descrive l'indeterminazione con la quale siamo in grado di far partire e di fermare il cronometro nell'istante esatto in cui il pendolo si ferma ($\sigma_i \equiv \epsilon_i$).

Due considerazioni sono necessarie.

L'indeterminazione nella misura del periodo ha diverse cause, ne citiamo alcune: a) L'errore di lettura del cronometro, che è piccolo, 0.01 s. b) Il tempo di reazione, che è almeno dell'ordine del decimo di secondo - per tempo di reazione si intende il tempo che intercorre tra la ricezione di uno stimolo, per esempio visivo (nel nostro caso la percezione del pendolo alla sua quota massima), e l'esecuzione di un compito (nel nostro caso la pressione del tasto del cronometro). c) La capacità di individuare tale posizione. In quest'ultimo caso è difficile stimare di quanto può essere l'errore, certamente almeno diversi centesimi di secondo. Una prima stima complessiva dell'errore totale ci porterebbe quindi a prevedere un valore ben maggiore di quello trovato. Cosa è accaduto?

La spiegazione è abbastanza semplice. Potendo seguire l'intera dinamica del pendolo siamo in grado di prevedere l'istante in cui questo passerà per il suo massimo, in ciò riducendo assai (b). Anche (c) viene ridotto, in quanto siamo aiutati dalla "ritmicità" del moto e "tendiamo" a schiacciare il pulsante in due istanti che, se non entrambi corrispondenti esattamente al massimo, sono fra loro separati da un periodo.

Una seconda considerazione riguarda la scelta della posizione alla quale misurare i periodi. Scegliere il massimo può apparire non ottimale. Il pendolo si muove per un lasso di tempo relativamente lungo in un piccolo intervallo di traiettoria attorno al massimo. Potrebbe sembrare più efficace tentare di misurare i tempi nei minimi, cioè nella posizione verticale. In tale posizione il pendolo si trova, infatti, solo per un breve lasso di tempo e da questa si allontana rapidamente, rendendo in apparenza più semplice l'identificazione dell'istante corretto nel quale far partire (o fermare) il cronometro. Senza considerare la necessità di definire un preciso riferimento col quale "raggiungere" il pendolo per definire la posizione verticale, alcuni lati negativi di questa procedura risultano evidenti:

- la rapidità col quale il pendolo passa dalla posizione verticale;
- la necessità di osservare contemporaneamente il pendolo e il riferimento;
- il mancato uso della istintiva capacità dell'occhio di rivelare un'inversione di velocità (utilizzata nel caso precedente).

Tutto ciò rende il guadagno dovuto alla ritmicità del moto più modesto, conducendo ad una indeterminazione che non si discosta sostanzialmente da quella ottenuta precedentemente. Abbiamo comunque imparato come fare a misurarla: chi avesse dubbi può (deve) fare delle prove ed analizzare i suoi risultati ...

Se ci si è soffermati su questo che può apparire un particolare banale è perché la questione rientra in quel più generale argomento che è la "pianificazione" di una misura che ha enorme importanza. Anche i più piccoli particolari possono portare miglioramenti

significativi al risultato finale, e ciò, ovviamente, non sempre si può sapere in anticipo senza le dovute prove.

2° RISULTATO: l'indeterminazione nella misura di un singolo periodo che può calcolarsi dalle nostre misure è $\epsilon_i = 0.04-0.05$ s

L'incertezza sulla media del periodo.

Come abbiamo detto il cronometro usato ha una sensibilità del centesimo di secondo. I valori ottenuti per la deviazione standard della media sono tutti uguali (alla prima cifra) e pari a 0.4 centesimi di secondo. È lecito ottenere, dopo una qualsiasi trattazione, un'incertezza inferiore alla sensibilità dello strumento usato? Certamente no. Un caso molto particolare può convincerci, in modo intuitivo. Supponiamo di avere eseguito la prima serie di misure con un cronometro assai peggiore, ad esempio con una sensibilità di 1 s. Le 130 misure, in questo caso, sarebbero state tutte uguali e pari a 1 s. Questo avrebbe portato, ovviamente, ad una deviazione standard nulla. In questo caso avremmo certamente usato uno strumento dalla sensibilità troppo bassa. In ogni caso non avremmo certamente potuto associare alla nostra (lecita) misura di $\langle T \rangle$ (1 s) una incertezza pari a 0 s!

Concludiamo osservando che l'errore su di una media di misure NON PUÒ essere inferiore alla sensibilità dello strumento. Nel nostro caso, perciò, a tutte e cinque le medie va associato un errore pari ad un centesimo di secondo:

$$\langle T_1 \rangle = 1.12 \pm 0.01 \text{ s}; \quad \langle T_2 \rangle = 1.10 \pm 0.01 \text{ s}; \quad \langle T_3 \rangle = 1.09 \pm 0.01 \text{ s}; \quad \langle T_4 \rangle = 1.69 \pm 0.01 \text{ s}; \quad \langle T_5 \rangle = 1.69 \pm 0.01 \text{ s}$$

Il confronto fra le medie del periodo.

Si procede quindi al confronto delle medie ottenute con i diversi valori di A, L ed m. Visto il valore di N (>30) si utilizza la distribuzione gaussiana (viceversa il test appropriato avrebbe dovuto basarsi sulla distribuzione del t-student).

- Si confronta la differenza delle medie (ad esempio la media $\langle T_i \rangle$ e la media $\langle T_j \rangle$) con la deviazione standard di tale differenza e ci si chiede se si possa rigettare o meno l'ipotesi che tale differenza sia nulla (medie uguali).

Per fare ciò si calcola la differenza $\langle T_i \rangle - \langle T_j \rangle$. La deviazione standard di tali differenze sarà calcolata dalla propagazione statistica degli errori:

$$\sigma(\langle T_i \rangle - \langle T_j \rangle) = \sqrt{\sigma^2(\langle T_i \rangle) + \sigma^2(\langle T_j \rangle)}$$

dove, ovviamente, tutte le σ sono deviazioni standard della media.

(nel nostro caso tutte le deviazioni standard delle differenze sono uguali e pari a $\sqrt{0.1^2 + 0.1^2} = 0.014$)

Il rapporto tra la differenza e la sua deviazione standard

$$\frac{\langle T_i \rangle - \langle T_j \rangle}{\sigma(\langle T_i \rangle - \langle T_j \rangle)}$$

ci fornisce il numero di deviazioni standard con il quale il nostro risultato differisce da zero. Da tale valore e dalle tavole (Integrale normale degli errori: appendice A del Taylor) si legge la probabilità che tale discrepanza sia significativa, cioè non dovuta ad una fluttuazione statistica.

Si ottengono i seguenti risultati:

test	differenza $\Delta\langle T \rangle$ (s)	$\sigma(\Delta\langle T \rangle)$ (s)	n	p(diff.=0)	P(medie diverse)
1-2	0.02	0.014	1.4	0.16	0.84
4-5	0	0.014	0	1	0

TABELLA 7

Si noti che la tabella del Taylor fornisce il valore di P

Vediamo quindi che non possiamo respingere l'ipotesi che queste differenze siano nulle con adeguata significatività ($p \leq 0.05$) anche se non possiamo non notare come la probabilità che la differenza tra i due periodi con angoli grandi ($\langle T_1 \rangle - \langle T_2 \rangle$) sia spiegabile con "bassa" probabilità dalle fluttuazioni statistiche (solo il 16 %). Se avessimo più tempo questo ci suggerirebbe di ripetere la misura con un angolo maggiore (diciamo circa 40-45 gradi) oppure con un cronometro più sensibile, per diminuire σ .

3° RISULTATO: variando l'angolo di oscillazione non abbiamo differenze significative di periodo (con una soglia $p=0.15$); questo è noto come *isocronicità del pendolo*. Notiamo comunque che, variando θ_0 tra 10 e 30 riscontriamo differenze che potremmo considerare "significative" ponendo la soglia a $p = 0.16$. In questo caso il periodo crescerebbe all'aumentare dell'angolo.

Si noti che l'isocronicità del pendolo ci rassicura circa uno degli effetti evidenti dell'attrito: il progressivo diminuire dell'ampiezza dell'oscillazione. Per quanto visto, se θ è sufficientemente piccolo, tale riduzione non influisce sul periodo.

La forte differenza fra i periodi misurati con $L = 30$ cm e quelli con $L = 70$ cm ci assicura senza l'ausilio di test statistici che il periodo T dipende significativamente da L . Per comodità riportiamo qui di seguito (dalla tabella 3) i valori trovati (usiamo ovviamente i valori ottenuti con eguale θ_0 (30°):

$$\begin{aligned} L = 30 \text{ cm} &\Rightarrow \langle T \rangle = 1.12 \pm 0.01 \text{ s} \\ L = 70 \text{ cm} &\Rightarrow \langle T \rangle = 1.69 \pm 0.01 \text{ s} \end{aligned}$$

(ci sono ben $n = 40.7$ deviazioni standard di differenza!!)

4° RISULTATO: variando la lunghezza L del pendolo si ottiene una significativa differenza in $\langle T \rangle$: il periodo cresce all'aumentare di L .

Studiamo ora l'influenza della massa del pendolo m su $\langle T \rangle$. Le serie che ci interessano sono la 2° e la 3°, che differiscono solo nella massa. Riportiamo qui di seguito i risultati di queste due serie.

$$\begin{aligned} \text{massa di acciaio:} &\quad \langle T \rangle = 1.10 \pm 0.01 \text{ s} \\ \text{massa di alluminio:} &\quad \langle T \rangle = 1.09 \pm 0.01 \text{ s} \end{aligned}$$

Procediamo come sopra ed otteniamo:

test	differenza $\Delta\langle T \rangle$ (s)	$\sigma(\Delta\langle T \rangle)$ (s)	n	P(diff.=0)	P(medie diverse)
masse	0.01	0.014	0.71	0.48	0.52

TABELLA 8

Il nostro test ci dice che l'ipotesi che le due misure siano dello stesso valore vero a meno di fluttuazioni statistiche è accettabile.

5° RISULTATO: Il periodo T del pendolo non dipende dalla massa del pendolo.

Un primo riepilogo

Abbiamo stabilito sin'ora che il periodo T :

- dipende da L ;
- non dipende da θ_0 , per θ_0 piccoli;
- non dipende dalla massa;

Avevamo inoltre escluso la dipendenza dalla massa del filo.

La dipendenza funzionale di T da L .

T appare quindi sostanzialmente dipendere solo da L . Per definire questa relazione occorrerà quindi eseguire misure di T con diversi L , avendo cura di mantenere sempre θ_0 al di sotto di 8° (per essere sicuri di essere in una regione di "isocronicità"), ed utilizzare gli strumenti in nostro possesso per trovare tale dipendenza.

Per diminuire l'errore sulla misura di T possiamo misurare la lunghezza di un numero n di periodi consecutivi e poi dividere per n . Sapendo che il principale errore di misura del tempo è dovuto alla indeterminazione col quale facciamo partire e fermare il cronometro, tale indeterminazione ε_t rimarrà la stessa se misuriamo n periodi e quindi peserà su un singolo periodo ε_t/n . Si noti che questa è semplice propagazione degli errori:

$$T = T_n/n \Rightarrow \sigma_T = \sigma_{nT}/n.$$

Questa procedura è permessa da alcuni dei risultati precedenti: l'isocronicità del pendolo, e le sue conseguenze sull'effetto dell'attrito cui si è accennato prima, e la conoscenza sperimentale di σ_T . La nostra indeterminazione è risultata compresa tra 0.04 s e 0.05 s. Nel seguito utilizzeremo per precauzione quest'ultimo valore.

Misuriamo il periodo di $n = 50$ oscillazioni di un pendolo (cercando di mantenere $\theta_0 < 8^\circ$) ed L circa 70 cm, 80 cm, 90 cm e 100 cm.

Troviamo i seguenti valori:

L (cm) (± 0.4 cm)	nT (s) (± 0.05 s)	T (s) (± 0.001 s)
70.5	84.41	1.688
79.8	89.53	1.791
90.0	95.26	1.905
100.0	100.45	2.009

TABELLA 9

{Ogni misura di nT è affetta da un errore sperimentale $\sigma_{nT} = 0.05$ s, conseguentemente $\sigma_T = 0.001$ s (= σ_{nT}/n)}

Una prima informazione sulla funzione che lega T ad L ci viene fornita inserendo i dati in un grafico (vedi Fig. 5).

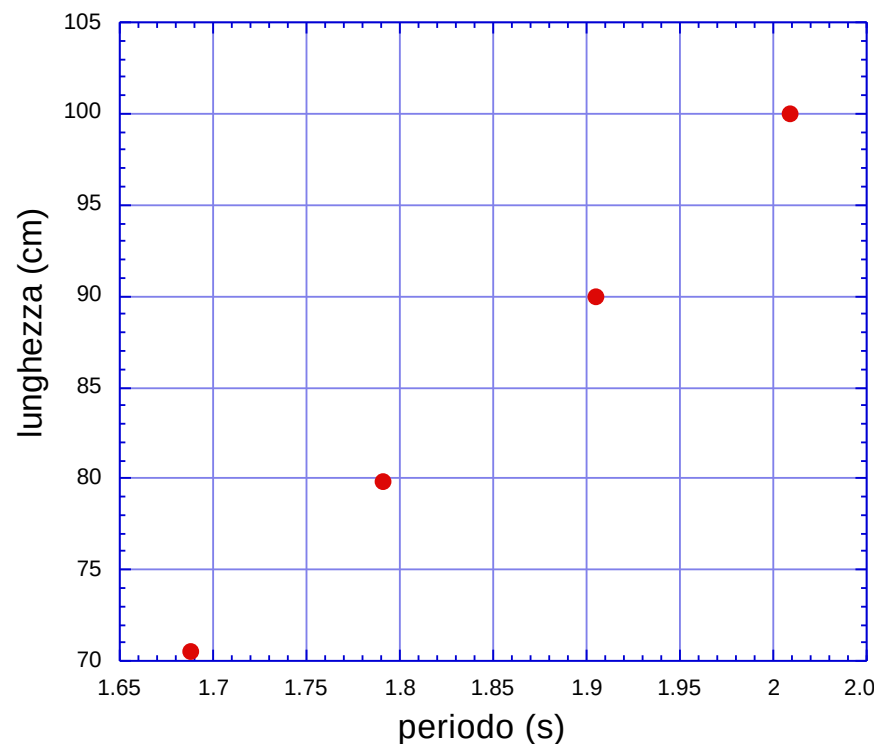


FIGURA 5

A occhio possiamo dire che la relazione potrebbe anche essere lineare.

Si noti che l'errore sul periodo è pari ad un decimo della divisione piccola. Quello sulla lunghezza a quattro decimi della divisione piccola. In entrambi i casi la dimensione degli errori è inferiore a quella dei punti.

Proviamo a calcolare la miglior retta e la migliore parabola che descrive i nostri punti. Utilizziamo il metodo dei minimi quadrati usando il nostro calcolatorino pre-programmato oppure (meglio) facendo i conti come descritto in appendice 1.

Le due relazioni che vogliamo provare sono (vedi appendice 1):

lineare: $L = a + bT$ $y = L;$ $x = T$
 quadratica: $L = c + eT^2$ $y = L;$ $x = T^2$.

Si noti che abbiamo posto il termine lineare della relazione quadratica a zero (in generale avremmo dovuto scrivere $L=c+dT+eT^2$). Questa è una semplificazione necessaria per poter usare le semplici procedure di fit a due parametri indicate in appendice; come vedremo non toglie nulla alla nostra trattazione.

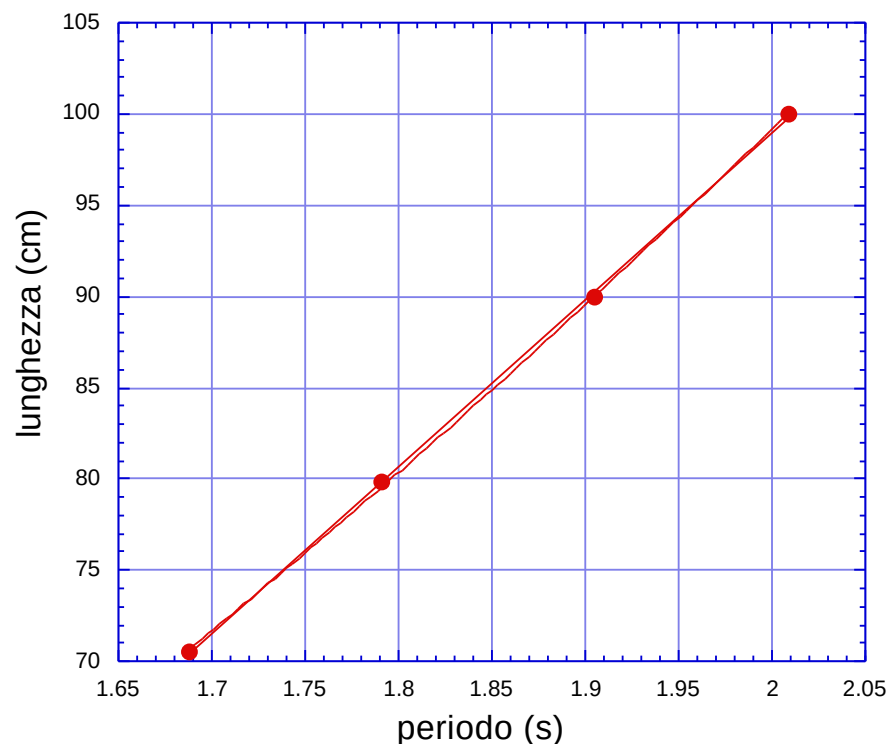


FIGURA 6

Otteniamo:

lineare: $a = -84.2 \pm 1.9 \text{ cm}$
 $b = 91.6 \pm 1.0 \text{ cm/s}$
 $r = 0.99986$

quadratica: $c = 0.09 \pm 0.96 \text{ cm}$
 $e = 24.8 \pm 0.3 \text{ cm/s}^2$
 $r = 0.99987$

Le due regressioni sono praticamente equivalenti, come viene confermato anche visivamente riportando sul grafico le curve.

Per riportare sul grafico una curva dobbiamo trovare le coordinate di alcuni punti della curva, calcolando alcuni valori della variabile dipendente avendo assegnato valori alla variabile indipendente. Nel caso di una retta due punti sono ovviamente sufficienti, per una parabola ne servono di più per poterla tracciare con una certa precisione a mano. Ad esempio nel caso della regressione lineare:

$$L = -84.2 + 91.6 \times T; T = 1.70 \text{ s} \Rightarrow L = 71.5 \text{ cm}; T = 2.00 \text{ s} \Rightarrow L = 99.0 \text{ cm}$$

Ad una prima analisi saremmo tentati di scegliere come modello funzionale quello lineare, ovvero il modello più semplice. Lo studio dei parametri "a" e "c" suggerisce una scelta diversa. I due valori trovati sono infatti estremamente informativi. "c" può essere considerato nullo, mentre "a" è sicuramente negativo. Questo significa che a valori di periodo $T < -a/b$ (0.92 s nel nostro caso) dovrebbero corrispondere valori negativi di L. Il che, ovviamente, non è possibile. Possiamo affermare che

il modello lineare, pur descrivendo correttamente i dati sin qui raccolti, fa una predizione sul comportamento del sistema NON corretta; è quindi già solo con questi dati da preferire il modello quadratico, che, almeno a questa semplice analisi non cade in questo assurdo.

Prima di proseguire dobbiamo soffermarci su un punto che abbiamo sin'ora trascurato, e cioè sulla validità del calcolo delle deviazioni standard dei parametri delle due regressioni. Come ricordato in appendice tale calcolo si basa sull'assunzione che gli errori sulle ascisse (T) siano trascurabili rispetto a quelli sulle ordinate (L). La verifica di questa assunzione dipende dalla relazione funzionale. Nei due casi contemplati infatti gli errori pesano diversamente:

lineare: $\epsilon_{\text{rel}}(T) = \frac{\sigma_T}{T}$; $\epsilon_{\text{rel}}(L) = \frac{\sigma_L}{L}$

quadratico: $\epsilon_{\text{rel}}(T) = \frac{2\sigma_T}{T}$; $\epsilon_{\text{rel}}(L) = \frac{\sigma_L}{L}$

dove la differenza sta nel peso doppio dell'errore sul tempo nel caso quadratico. Nel caso peggiore abbiamo $\epsilon_{\text{rel}}(T) \approx 0.001$ e $\epsilon_{\text{rel}}(L) \approx 0.004$. La nostra assunzione è quindi sufficientemente verificata

Come possiamo definire meglio la dipendenza tra L e T ? Visto che ragionare sulla dinamica a piccoli T (e quindi piccoli L) ci ha permesso di escludere il modello lineare, eseguiamo alcune misure riducendo la lunghezza del pendolo, ad esempio con lunghezze da 20 cm a 60 cm a passi di 10 cm. Otteniamo:

L (cm)	nT (s)	T (s)
20.2	45.16	0.90320
30.3	55.33	1.1066
40.4	63.87	1.2774
49.8	70.87	1.4174
60.1	77.79	1.5558
70.5	84.41	1.6882
79.8	89.53	1.7906
90.0	95.26	1.9052
100.0	100.45	2.0090

TABELLA 10

dove si sono riportati anche i risultati ottenuti prima, per completezza.

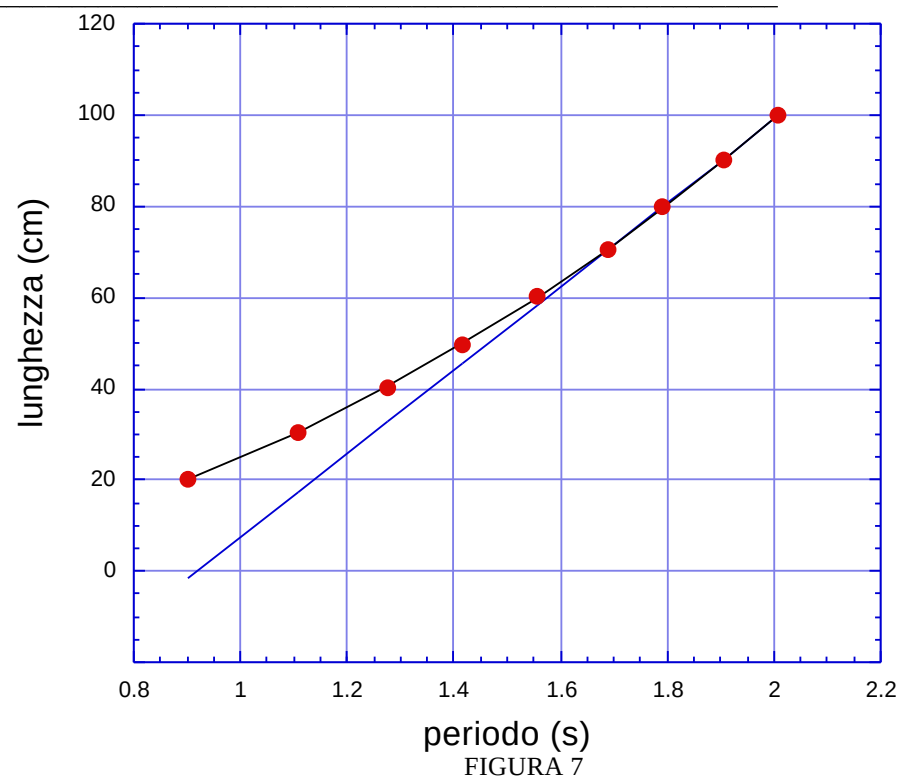
Aggiungiamo ora i nuovi punti sul grafico (figura 7).

Vediamo quindi che, certamente la relazione lineare è da escludere, mentre quella quadratica ricavata con i primi quattro punti descrive abbastanza bene anche questi nuovi cinque. Possiamo comunque ripetere la regressione quadratica con tutti i punti per migliorare la stima dei parametri " c " ed " e ". Per completezza calcoliamo anche la nuova migliore retta che passa per i nove punti.

Otteniamo:

lineare:	$a = -50.3 \pm 4.6$ cm
	$b = 72.8 \pm 3.0$ cm/s
	$r = 0.9942$
quadrata:	$c = -0.06 \pm 0.12$ cm
	$e = 24.82 \pm 0.04$ cm/s ²
	$r = 0.99999$

Vediamo (Figura 9) come previsto che la regressione lineare è peggiorata (si noti r , ma anche le incertezze sui parametri), mentre quella quadrata è migliorata (l'errore su " e " è meno dello 0.2%).



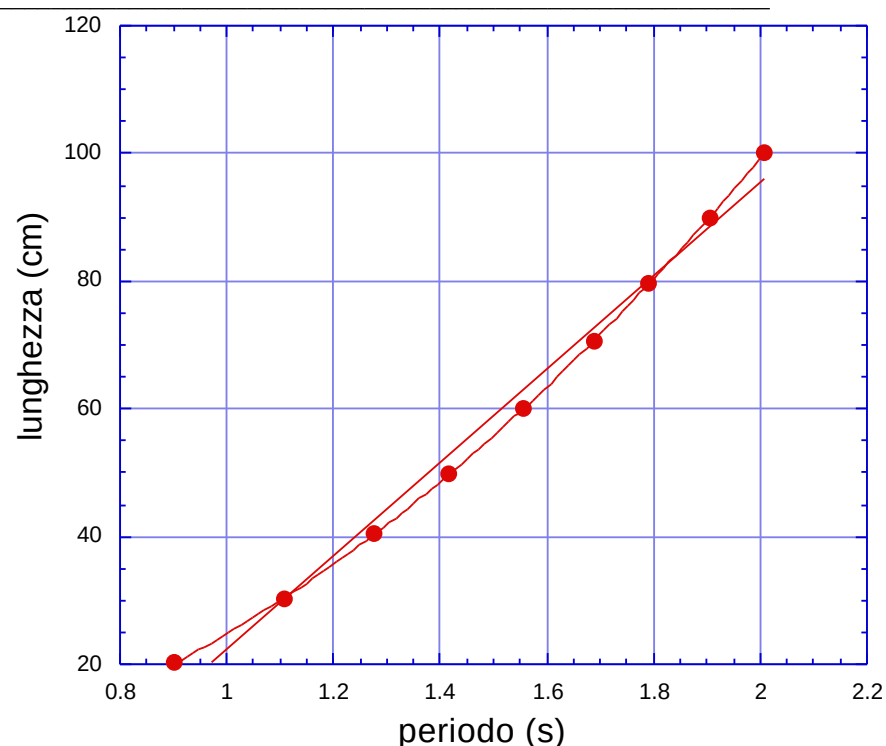


FIGURA 8

6° RISULTATO: Una relazione quadratica tra L a T descrive correttamente tutti i risultati:

$$L = (c) + eT^2$$

dove c è praticamente nullo ($c = -0.06 \pm 0.12$ cm) ed e è misurabile all'un per mille ($e = 24.82 \pm 0.04$ cm/s²). Possiamo scrivere quindi:

$$T \propto \sqrt{L} \text{ (dove } \propto \text{ sta per "proporzionale a")}$$

Considerazioni

Si noti che non abbiamo scritto "la relazione è quadratica" in quanto non abbiamo ragioni per sostenerlo. Ci potrebbe essere una relazione, anche più complicata, che descrive

egualmente bene (o meglio) questi risultati, e, per esempio, ne predice più accuratamente altri. Nei limiti della nostra trattazione, comunque ci fermiamo qui. Per esercitarci potremo provare altre funzioni che siano facilmente riconducibili ai nostri semplici algoritmi. Tra questi, ad esempio (vedi appendice 2)

$$L = \alpha T^n$$

ci permette di trovare la migliore legge di potenza che descrive i nostri dati (ci aspettiamo di trovare $\alpha \approx e$, $n \approx 2$). Inoltre a relazione

$$L = \beta(e^{\gamma T} - 1)$$

ci permette di verificare la possibilità che il legame fra L e T possa essere descritto da una relazione esponenziale. Si noti che in questo caso è stato inserito un termine "-1" che pone $L = 0$ per $T = 0$.

Questi ulteriori test ci convincerebbero che la nostra relazione quadratica è ancora la più adeguata a descrivere i dati.

L'importanza del grafico

Discutiamo ancora i risultati delle precedenti regressioni lineari (vedi sopra). In un gran numero di casi ci si trova spesso a studiare due serie di dati che si pensa mostrino una correlazione, forse lineare. Spinti da fretta spesso si "salta" il passo "grafico", i dati vengono immediatamente inseriti in un calcolatore tascabile e i dati per a, b ed r immediatamente ottenuti. Il valore $r = 0.9942$ è in molti casi considerato "molto buono" e saremmo quindi spinti ad accettare l'ipotesi di linearità, che abbiamo visto essere errata. Che sia necessario SEMPRE osservare prima i dati su di un grafico è probabilmente evidenziato dai grafici in figura 9 che illustrano due serie di punti.

Si noti che non sono state indicate scale e unità di misura. Entrambi gli assi hanno unità arbitrarie, che sono le stesse per i due grafici.

La prima è chiaramente una retta con del "rumore" cioè con delle indeterminazioni casuali su ogni punto (ad esempio il risultato di misure correlate linearmente affette da errori sperimentali, più grandi di quelli osservati nelle nostre misure). La seconda serie, invece, corrisponde ad una serie di misure correlate quadraticamente, con piccolissimi errori. Ebbene calcolando la regressione lineare nei due casi si ottengono gli stessi risultati, sia per i coefficienti (la migliore retta che passa per le due serie di punti è la stessa, vedi prossimo grafico), sia per le indeterminazioni di tali coefficienti, sia per r (che risulta essere 0.9897).

Solo osservando i grafici possiamo immediatamente dire che mentre una relazione è molto probabilmente lineare, l'altra non lo è certamente.

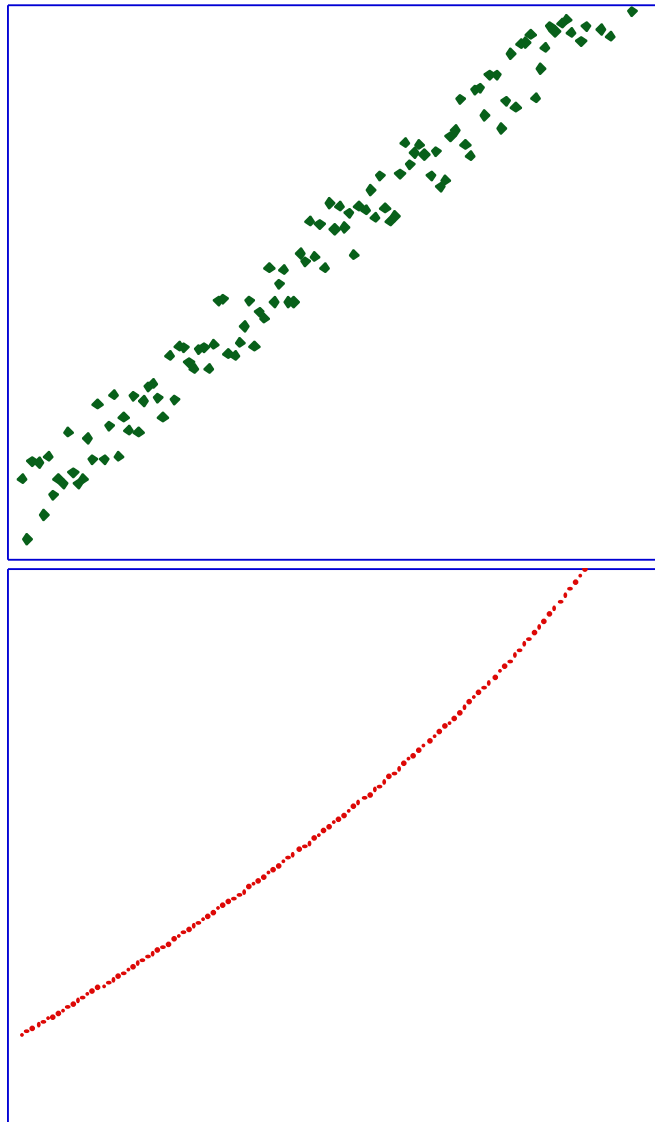


FIGURA 9

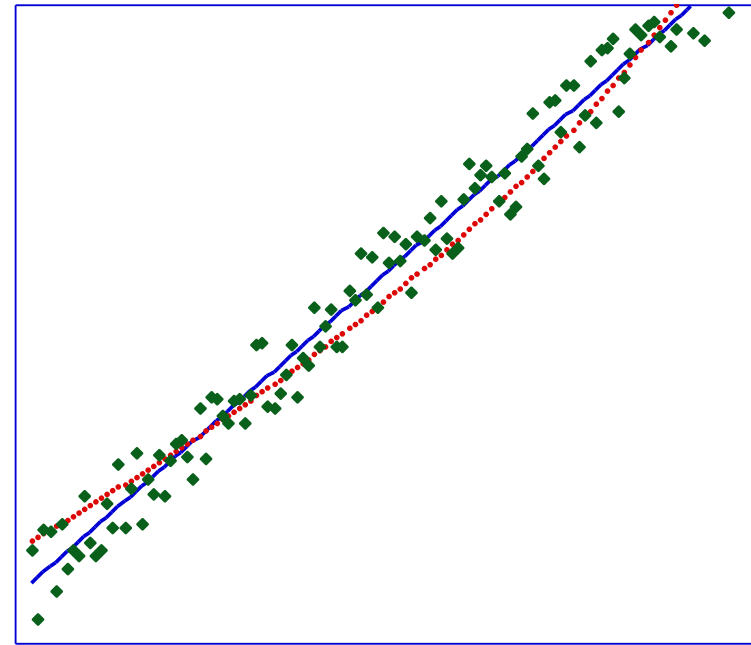


FIGURA 10

LA MISURA DI g

A questo punto ci ricordiamo della fisica studiata lo scorso anno e notiamo che, in effetti, la relazione che lega L a T è quadratica, per la precisione è data da (appendice 2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

Le nostre misure, quindi, confermano la forma di questa relazione. Inoltre lo studio delle leggi fisiche che governano il moto del pendolo ci ha consentito di associare al coefficiente "e" che abbiamo trovato, una grandezza fisica importante: l'accelerazione di gravità g :

$$g = 4\pi^2 e \pm 4\pi^2 \sigma_e = 9.799 \pm 0.016 \text{ m/s}^2$$

7° RISULTATO: Il valore del modulo della accelerazione di gravità nel nostro laboratorio è:

$$g = 9.799 \pm 0.016 \text{ m/s}^2$$

Le nostre misure sono quindi anche una misura indiretta di g, una volta data per acquisita la legge del pendolo semplice. L'errore sulla misura è molto piccolo (misure con errori minori dell'1% non sono molto facili da fare di solito) e può già consentirci una rozza "localizzazione" del nostro laboratorio tra i 15° e i 55° di latitudine (vedi tabella in appendice 3).

Alcune considerazioni su errori sistematici

Misurare con indeterminazioni così piccole, comunque, ci impone alcune considerazioni. Le assunzioni e semplificazioni che abbiamo fatto e discusso abbastanza superficialmente, passerebbero anche un esame più approfondito, che diviene necessario prima di accettare errori così piccoli? La nostra trattazione degli errori, infatti, tiene conto solo degli errori casuali, ma non di quelli sistematici che, ad esempio, vengono introdotti certamente ogni volta che si fa una semplificazione. Tali errori sono trascurabili rispetto a questi piccoli errori casuali? La legge del pendolo che abbiamo usato assume, ad esempio, che tutta la massa del pendolo sia concentrata in un punto materiale (cioè massa del filo nulla, dimensioni della massa attaccata al pendolo nulle pendolo nulle). Sappiamo che ciò non è vero, anche se abbiamo detto che è abbastanza accettabile una assunzione del genere. Ma come possiamo fare a calcolare gli errori che ci causano queste semplificazioni? Basta fare un po' di conti (vedi appendice 4) e vedere come la legge verrebbe modificata in presenza di fili con massa, o di masse non puntiformi. Ad esempio in quest'ultimo caso non trascurando le dimensioni finite della massa e considerandola come un'asta omogenea di semilunghezza d - continuando a chiamare L la distanza del baricentro dell'asta con il punto di sospensione - si ottiene facilmente (appendice 4):

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad L^2 \approx \frac{g}{4\pi^2} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2\right) T^2$$

che si riduce alla precedente relazione per $d \ll L$.

In questo caso l'accelerazione di gravità:

$$g = 4\pi^2 e \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2\right)$$

L'errore percentuale che si commette trascurando "d" è dato da:

$$1 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2 - 1 \approx \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2$$

affinchè questo errore sia minore dello 0.2 % dovrà essere:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2 < 0.002 \Rightarrow \frac{d}{L} < 0.077$$

ciò significa che per $L = 100 \text{ cm}$, $d < 7.7 \text{ cm}$ e per $L = 20 \text{ cm}$, $d < 1.5 \text{ cm}$.

Quindi nel nostro caso per i valori di L piccoli l'approssimazione "d" trascurabile non è corretta ed andrebbe usata la formula completa.

8° RISULTATO: La misura di g con questa precisione richiede che tutti gli errori sistematici siano minori del 2 per mille. Ciò NON è verificato, ad esempio, per i piccoli L, in quanto in tal caso, non può trascurarsi la dimensione finita del nostro pendolo.

Teniamo presente questo risultato e consideriamo il problema della misura di g sotto una diversa angolazione.

Se fosse stato richiesto immediatamente di misurare g data la legge del pendolo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

la procedura più spontanea sarebbe stata quella di montare il pendolo, misurare L, misurare T e calcolare g:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \sigma_L\right)^2 + \left(8\pi^2 \frac{L}{T^3} \sigma_T\right)^2} = g \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

Procedendo a più misure di T con diversi L, avremmo potuto mediare tutti i nostri risultati. Avremmo ottenuto lo stesso valore di g? Vediamo cosa succede analizzando in questo modo i nostri risultati.

Otteniamo:

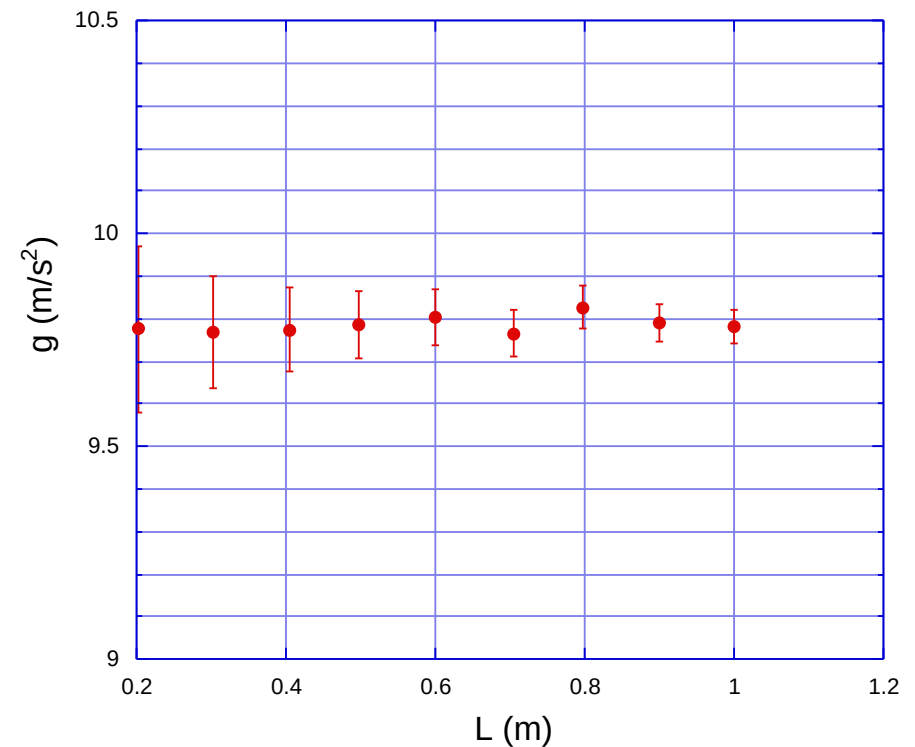
misura	L (m)	T (s)	g (m/s ²)	σ_g (m/s ²)
1	0.202	0.90320	9.77	0.19
2	0.303	1.1066	9.76	0.13
3	0.404	1.2774	9.774	0.097
4	0.498	1.4174	9.786	0.080
5	0.601	1.5558	9.802	0.066
6	0.705	1.6882	9.766	0.057
7	0.798	1.7906	9.826	0.050
8	0.900	1.9052	9.789	0.045
9	1.000	2.0090	9.781	0.040
media			9.790	0.020

TABELLA 11

Si noti che data la variabilità delle deviazioni standard per calcolare la media si è fatto uso di una media pesata:

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_{i=1}^9 \frac{g_i}{\sigma_{g_i}^2}}{\sum_{i=1}^9 \frac{1}{\sigma_{g_i}^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^9 \frac{1}{\sigma_{g_i}^2}}}$$

Vediamo che il risultato ottenuto è perfettamente compatibile con il risultato precedente.



GURA 11

FI

La tabella 11, inoltre, mette in particolare risalto il risultato "8": i valori di g ottenuti per L piccoli sono più piccoli della media. Abbiamo visto che per quei valori è necessario tener conto della dimensione finita del pendolo che nel nostro caso richiede di moltiplicare il valore di g per il fattore:

$$L=20.2 \text{ cm} \Rightarrow 1.0033$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{L}\right)^2\right) = 1 + 1.33/L^2(\text{cm}) =$$

$$L=30.3 \text{ cm} \Rightarrow 1.0015$$

Che porterebbe i valori di g rispettivamente a 9.80 e 9.77 m/s², avvicinandoli alla media.

Un ulteriore commento in merito alla influenza delle dimensioni del pendolo. Questo parametro era tra quelli inclusi nella nostra lista di "candidati" per influenzare il periodo T . Mentre lo studio dell'eventuale contributo di L , m e θ_0 è stato affrontato sperimentalmente, senza la necessità di conoscere la fisica del sistema, l'influenza di " d " è stata invece messa in luce da ragionamenti che si basano sulle relazioni fisiche che governano la dinamica del pendolo. Avremmo potuto procedere allo stesso modo e misurare T di pendoli con tutti i parametri uguali tranne " d ". In questo caso si è preferito invece mettere in luce come un raffinamento di una teoria possa migliorare un accordo, già molto buono, con dei dati sperimentali.

Lo studente curioso ed un po' incline alla matematica si domanderà se la validità della assunzione di "piccoli angoli" per $\theta \leq 8^\circ$ si possa verificare. Il "raffinamento" della teoria per angoli qualsiasi non è così semplice. Comunque con un po' di attenzione potrà seguire i passaggi illustrati nella appendice 5, e scoprire che il limite per avere errori allo 0.1 % è proprio $\approx 8^\circ$ e che già a $\approx 10^\circ$ si commette una sovrastima del periodo dello 0.2%.

APPENDICE 1

Questa appendice fornisce un aiuto al calcolo di alcune variabili statistiche fondamentali qualora non si abbia a disposizione un calcolatore tascabile pre-programmato allo scopo. Le medesime relazioni possono anche essere usate ove si volesse scrivere un programma al computer per calcolare tali variabili.

Definizione

Si supponga di avere eseguito N misure di una variabile che chiamiamo genericamente ξ . Definiamo:

$$S_{\xi} = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

Si noti che S_{ξ} può essere costruita nel calcolatore tascabile mano mano che si inseriscono i dati.

Media

$$\langle \xi \rangle = \frac{S_{\xi}}{N}$$

Varianza

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \langle \xi \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\xi_i^2 + \langle \xi \rangle^2 - 2\xi_i \langle \xi \rangle) = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$$

Quindi:

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{N} S_{\xi^2} - \left(\frac{1}{N} S_{\xi} \right)^2$$

Coefficiente di correlazione r (tra x e y):

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}}$$

Come visto per la varianza:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} S_{x^2} - \frac{1}{N^2} S_x^2$$

analogamente:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} S_{y^2} - \frac{1}{N^2} S_y^2$$

inoltre:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i y_i + \langle x \rangle \langle y \rangle - x_i \langle y \rangle - y_i \langle x \rangle) = \\ &= \langle xy \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle = \\ &= \frac{1}{N} S_{xy} - \frac{1}{N^2} S_x S_y \end{aligned}$$

Da cui

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{N} S_{xy} - \frac{1}{N^2} S_x S_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{N} S_{x^2} - \frac{1}{N^2} S_x^2 \right) \left(\frac{1}{N} S_{y^2} - \frac{1}{N^2} S_y^2 \right)}}$$

Quindi:

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(NS_{x^2} - S_x^2)(NS_{y^2} - S_y^2)}}$$

Regressione lineare

$$y_i = a + bx_i$$

Richiamiamo prima brevemente la procedura per ricavare la migliore stima dei coefficienti a e b.

Se conoscessimo a e b potremmo calcolare la probabilità di ottenere y_i :

$$P_{a,b}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_y} e^{-(y_i - a - bx_i)^2/2\sigma_y^2}$$

dove si è assunto che le x_i siano note con errori trascurabili.

La probabilità di ottenere le N misure è il prodotto delle probabilità e quindi:

$$P_{a,b}(y_1, \dots, y_N) \propto \frac{1}{\sigma_y^N} e^{-\chi^2/2}$$

dove

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{\sigma_y^2}$$

Le migliori stime di a e b sono quelle che massimizzano χ^2 .

Quindi:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -\frac{2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -\frac{2}{\sigma_y^2} \sum_{i=1}^N x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

da cui

$$Na + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Oppure

$$N a + S_x b = S_y$$

$$S_x a + S_{x^2} b = S_{xy}$$

da cui:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} S_y & S_x \\ S_{xy} & S_{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & S_x \\ S_x & S_{x^2} \end{vmatrix}} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} N & S_y \\ S_x & S_{xy} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & S_x \\ S_x & S_{x^2} \end{vmatrix}}$$

Quindi:

$$a = \frac{S_y S_{x^2} - S_x S_{xy}}{N S_{x^2} - S_x^2}$$

$$b = \frac{N S_{xy} - S_y S_x}{N S_{x^2} - S_x^2}$$

Si può stimare l'incertezza delle y_i considerando la loro distribuzione attorno al valore vero $A + Bx$ (dove A e B sono i valori veri dei parametri di cui a e b sono le migliori stime).

Le deviazioni

$$y_i - a - bx_i$$

saranno normalmente distribuite con valore medio 0 e larghezza σ_y .

La miglior stima di σ_y è data da:

$$\sigma_y^2 \equiv \sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - a - bx_i)^2$$

Come si può verificare da

$$\frac{\partial P_{ab}(y_1 \dots y_N)}{\partial \sigma} = 0$$

e dove si tiene conto dell'inserimento di 2 parametri stimati (a e b). (Il denominatore è dato dal numero delle misure N meno il numero di parametri "calcolati" e cioè è il numero dei gradi di libertà).

L'incertezza su a e b si calcola facilmente con la propagazione degli errori usando i valori trovati in precedenza:

$$a = \frac{S_y S_{x^2} - S_x S_{xy}}{N S_{x^2} - S_x^2}; \quad b = \frac{N S_{xy} - S_y S_x}{N S_{x^2} - S_x^2}$$

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2; \quad \sigma_b^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2$$

quindi

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_{x^2} - x_i S_x}{N S_{x^2} - S_x^2} \right)^2 \sigma^2 \\ &= \frac{N S_{x^2}^2 + S_{x^2} S_x^2 - 2 S_x^2 S_{x^2}}{(N S_{x^2} - S_x^2)^2} \sigma^2 = \\ &= S_{x^2} \frac{N S_{x^2} + S_x^2 - 2 S_x^2}{(N S_{x^2} - S_x^2)^2} \sigma^2 = \\ &= S_{x^2} \frac{N S_{x^2} - S_x^2}{(N S_{x^2} - S_x^2)^2} \sigma^2 = \\ &= \frac{S_{x^2}}{N S_{x^2} - S_x^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

analogamente:

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{N x_i - S_x}{N S_{x^2} - S_x^2} \right)^2 \sigma^2 = \\ &= \frac{N^2 S_{x^2} + N S_x^2 - 2 N S_x^2}{(N S_{x^2} - S_x^2)^2} \sigma^2 = \\ &= N \frac{N S_{x^2} - S_x^2}{(N S_{x^2} - S_x^2)^2} \sigma^2 = \\ &= \frac{N}{N S_{x^2} - S_x^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

Ricapitoliamo nel successivo quadro i risultati relativi alla regressione lineare:

$$y_i = a + b x_i$$

$$a \pm \sigma_a = \frac{S_y S_{x^2} - S_x S_{xy}}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{S_{x^2}}{\Delta}} \sigma$$

$$b \pm \sigma_b = \frac{N S_{xy} - S_y S_x}{\Delta} \pm \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \sigma$$

dove:

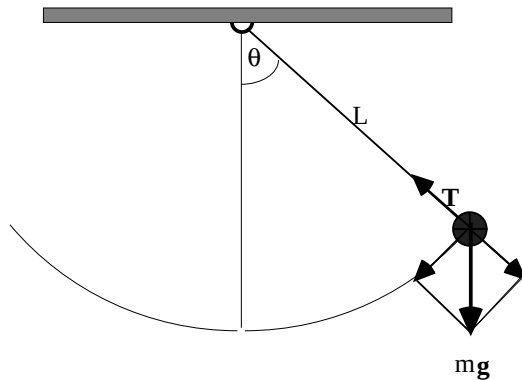
$$\Delta = N S_{x^2} - S_x^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - a - b x_i)^2}$$

APPENDICE 2

La legge del pendolo

In questa appendice si richiamano alcuni passaggi e concetti di fisica necessari a ricavare la legge del moto per un pendolo e, di qui, il suo periodo.



coordinata radiale:

$$mg \cos \theta - T = m a_r$$

coordinata angolare:

$$mg \sin \theta = m a_\theta$$

$$a_\theta = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Facciamo attenzione ora ai segni. Scegliendo i θ positivi nel semiperiodo di destra, $\sin \theta > 0$ a destra dove l'accelerazione è negativa, viceversa nell'altro semiperiodo $\sin \theta < 0$ e l'accelerazione è positiva; quindi:

$$mg \sin \theta = -m L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

da cui si ricava l'equazione del moto del pendolo:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (*)$$

Per piccole oscillazioni:

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Questa è l'equazione del moto armonico. La sua soluzione si può ricavare facilmente osservando che la forma di $\theta(t)$ deve essere tale che la sua derivata seconda deve essere proporzionale alla funzione stessa cambiata di segno. Conosciamo due funzioni che hanno questa caratteristica: il seno ed il coseno. In generale potremo scrivere:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

dove A e ϕ sono due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali ed ω è la frequenza angolare del moto ed è pari alla radice quadrata del coefficiente di θ , come si ricava sostituendo la soluzione nella equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{dt^2}[A \sin(\omega t + \phi)] + \frac{g}{L} A \sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$(-\omega^2 + \frac{g}{L}) A \sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Osservando $\theta(t)$ si nota che il periodo T è tale che $\omega T = 2\pi$, cioè:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Allo stesso risultato si può arrivare con considerazioni energetiche. Questo percorso ci permette di trovare una relazione che ci sarà utile anche in seguito (appendice 5).

L'energia meccanica associata al moto del pendolo avrà un contributo cinetico

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

e di un contributo potenziale

$$-mgL \cos \theta$$

dove il segno è stato scelto con le stesse considerazioni fatte sopra: all'aumentare di θ il $\cos\theta$ diminuisce e quindi l'energia potenziale aumenta, mentre l'energia cinetica diminuisce. Quindi:

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos\theta$$

e, derivando:

$$0 = m L^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \frac{d\theta}{dt} \sin\theta$$

cioè, nuovamente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$

APPENDICE 3

La variazione di g con la latitudine

In questa appendice si descrivono i principali motivi della variabilità dell'accelerazione di gravità g con la latitudine.

Una tabella finale di misure di g alle varie latitudini ci permetterà di verificare la bontà delle nostre misure.

L'accelerazione **g** descrive l'accelerazione sulla superficie terrestre dovuta alla forza di gravitazione universale, in prima approssimazione, per punti situati sulla superficie terrestre:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 981 \text{ cm/s}^2$$

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (\text{costante di gravitazione universale})$$

$$R_T = 6.378 \times 10^6 \text{ m} \quad (\text{raggio equatoriale})$$

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (\text{massa della terra})$$

Si deve tenere conto di due effetti per comprendere le variazioni medie di g con la latitudine:

i) l'accelerazione centripeta cui è sottoposto ogni corpo sulla terra, dovuta alla rotazione della terra

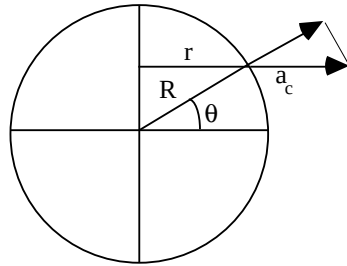
[$\Rightarrow$ accelerazione che è ovviamente maggiore all'equatore e che quindi riduce l'effetto della forza gravitazionale alle latitudini più prossime all'equatore];

ii) lo schiacciamento della terra ai poli, cioè un corpo è più vicino al centro della terra al polo che all'equatore.

[$\Rightarrow$ di nuovo una riduzione della forza gravitazionale all'equatore].

A quanto detto andrebbero aggiunte le considerazioni "locali": la densità della terra non è omogenea e quindi in prossimità di siti a densità maggiore, ci aspettiamo una forza maggiore. Di questo, comunque, non ci occuperemo.

i) La riduzione di g dovuta all'accelerazione centripeta.



$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T_T}\right)^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 r = \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 R_T \cos\theta$$

e la componente lungo la verticale è:

$$a_{cv} = a_c \cos\theta = \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 R_T \cos^2\theta = 3.4 \cos^2\theta \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

Quindi:

$$g' = \frac{GM_T}{R_T^2} - \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 R_T \cos^2\theta$$

ii) La riduzione di g dovuta alla non sfericità della terra

Si può dimostrare che per tener conto dello schiacciamento terrestre ai poli

$$\Delta R = 21.476 \text{ km}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{297}$$

si possono considerare le superfici equipotenziali sulla terra degli sferoidi, oppure, semplificando la matematica, ellissoidi di rotazione.

In tal modo si ottiene:

$$g'' = g' (1 + 0.0052884 \sin^2\theta - 0.0000059 \sin^2 2\theta)$$

Misure di g a varie latitudini

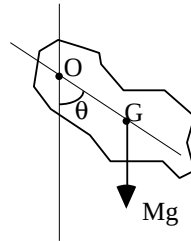
latitudine	g (cm/s ²)	latitudine	g (cm/s ²)	latitudine	g (cm/s ²)
0	978.039	38	979.995	52	981.247
5	978.078	39	980.083	53	981.336
10	978.195	40	980.171	54	981.422
15	978.384	41	980.261	55	981.507
20	978.641	42	980.350	56	981.592
25	978.960	43	980.440	57	981.675
30	979.329	44	980.531	58	981.757
31	979.407	45	980.621	59	981.839
32	979.487	46	980.711	60	981.918
33	979.569	47	980.802	65	982.288
34	979.652	48	980.892	70	982.608
35	979.737	49	980.981	75	982.868
36	979.822	50	981.071	80	983.059
37	979.908	51	981.159	85	983.178
				90	983.217

APPENDICE 4

La legge del pendolo (pendolo fisico)

Una breve introduzione alla fisica necessaria alla soluzione del moto del pendolo fisico precede il calcolo dell'approssimazione fatta nel corso dei nostri esperimenti.

Sia un pendolo come in figura:



$$\tau = \frac{dJ}{dt}$$

$$- Mg L \sin\theta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dove $L \equiv OG$ (distanza del centro di massa dall'asse di oscillazione) e dove si sono fatte le stesse considerazioni sui segni fatte in appendice 2.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I} \sin\theta = 0$$

e, per piccole oscillazioni:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I} \theta = 0$$

Quindi, come nel caso del pendolo semplice:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

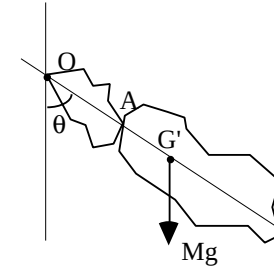
dove

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgL}}$$

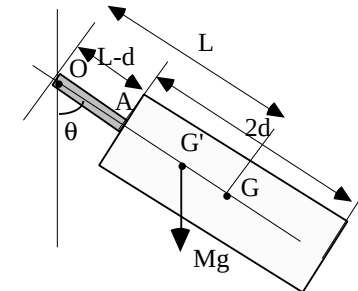
Questa relazione è valida per qualunque corpo di massa M , momento di inerzia I e il cui baricentro disti L dall'asse di rotazione.

Consideriamo ora un caso del genere:



In questo caso il corpo che oscilla è costituito da due parti distinte rigidamente connesse. Le due masse sono m ed M , il centro di gravità del sistema è in G' (quindi $L=OG'$, $M=m+M$, $I = I_m + I_M$).

Semplifichiamo il sistema e supponiamo che i due corpi siano due aste:



Per uniformità con quanto visto in precedenza, si è chiamata L la distanza tra il centro di massa del secondo corpo, di lunghezza $2d$, e l'asse di rotazione. Ovviamente ancora $L=OG'$. Per il teorema di Steiner I_M può essere scritto come il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo baricentro più il momento di inerzia di una massa pari a quella dell'asta concentrata nel baricentro moltiplicata per la distanza tra questo e l'asse di rotazione:

$$I_M = \frac{1}{12} M (2d)^2 + ML^2 = \frac{1}{3} M d^2 + ML^2$$

ed anche:

$$I_m = \frac{1}{3} m (L-d)^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I = I_m + I_M &= \frac{1}{3} m (L-d)^2 + \frac{1}{3} M d^2 + ML^2 \\ &= \frac{1}{3} m L^2 + \frac{1}{3} m d^2 - \frac{2}{3} m Ld + \frac{1}{3} M d^2 + ML^2 \\ &= ML^2 \left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right) \end{aligned}$$

dove si sono introdotti:

$$\mu = \frac{m}{M} \ll 1; \quad \delta = \frac{d}{L} \ll 1$$

La distanza OG' sarà data da:

$$L = OG' = \frac{\frac{L-d}{2} m + L M}{M + m} = \frac{L-d}{2} \frac{m}{M + m} + L \frac{M}{M + m}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} L &= L \left(\frac{1-\delta}{2} \frac{\mu}{1+\mu} + \frac{1}{1+\mu} \right) \approx \\ &\approx L (1-\mu) \left(1 + \frac{\mu}{2} (1-\delta) \right) \approx L \left(1 - \frac{\mu}{2} (1+\delta) \right) \end{aligned}$$

dove si sono trascurati i termini infinitesimi di ordine μ^2 o superiori.

In questo caso da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgL}}$$

si ottiene:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{ML^2 \left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right)}{(M+m) g L \left(1 - \frac{\mu}{2} (1+\delta) \right)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ML^2 \left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right)}{M g L (1+\mu) \left(1 - \frac{\mu}{2} (1+\delta) \right)} = \\ &= \frac{L}{g} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right)}{(1+\mu) \left(1 - \frac{\mu}{2} (1+\delta) \right)} = \\ &= \frac{L}{g} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right)}{1 + \mu - \frac{\mu}{2} (1+\delta) - \frac{\mu^2}{2} (1+\delta)} \approx \\ &\approx \frac{L}{g} \frac{\left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right)}{1 + \frac{\mu}{2} (1-\delta)} \approx \\ &\approx \frac{L}{g} \left(1 + \frac{1}{3} \mu + \frac{1}{3} \mu \delta^2 - \frac{2}{3} \mu \delta + \frac{1}{3} \delta^2 \right) \left(1 - \frac{\mu}{2} (1-\delta) \right) \approx \\ &\approx \frac{L}{g} \left(1 - \frac{\mu}{6} + \frac{\delta^2}{3} - \frac{\mu\delta}{6} \right) \end{aligned}$$

dove negli ultimi passaggi si sono nuovamente trascurati i termini infinitesimi di ordine μ^2 o superiori.

Riepilogando il nostro periodo può scriversi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sqrt{1 - \frac{\mu}{6} + \frac{\delta^2}{3} - \frac{\mu\delta}{6}}$$

APPENDICE 5

La legge del pendolo (grandi oscillazioni)

Dall'appendice 2 ricaviamo:

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos\theta$$

da cui

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 \frac{(E + mgL \cos\theta)}{m L^2} = (E/mgL + \cos\theta) 2 \frac{g}{L}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{E/mgL + \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{E/mgL + \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} t$$

Si noti che il moto descritto non è necessariamente oscillatorio. Se $E > mgL$ il pendolo infatti percorrerà una rotazione completa (in questo caso si devono fare alcune assunzioni sulla velocità o sulla rigidità della fune ... quali?). Nel caso che interessa a noi $E < mgL$. In tal caso ci sarà un angolo massimo $\theta_{\max}$ che soddisfa l'equazione :

$$E = - mgl \cos\theta_{\max}$$

per $\theta = \theta_{\max}$ avremo $v = 0$. Quindi:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{2g}{L}} t$$

ricordando che

$$\cos\theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

L'angolo θ varia tra $\pm \theta_{\max}$. Introduciamo la nuova variabile ϕ data da:

$$\sin\phi = \frac{1}{\Theta} \sin(\theta/2) \quad \Rightarrow \cos(\theta/2) d\theta = 2\Theta \cos\phi d\phi$$

$$\Rightarrow d\theta = 2\Theta \frac{\cos\phi}{\cos(\theta/2)} d\phi$$

con $\Theta = \sin(\theta_{\max}/2)$. Si noti che ϕ ora varia da 0 a 2π .

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{2\Theta \frac{\cos\phi}{\cos(\theta/2)} d\phi}{\Theta \sqrt{1 - \sin^2\phi}} = 2 \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\cos(\theta/2)} =$$

$$= 2 \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \Theta^2 \sin^2\phi}}$$

quindi:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \Theta^2 \sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

dove, per semplicità, si è scelto $\phi_0 = 0$. L'integrale è un integrale ellittico e la soluzione può trovarsi nelle tavole di integrali. A noi interessa notare che l'ampiezza delle oscillazioni è descritta da Θ . Se Θ è piccolo dovremmo ritrovare il risultato ottenuto in appendice 2. Espandendo l'integrando in serie di MacLauren

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) x^3 + \dots$$

si ottiene (sia $\xi = \Theta \sin\phi$):

$$(1 - \xi^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \dots$$

quindi:

$$\int_0^{\phi} d\phi \left(1 + \frac{1}{2} \Theta^2 \sin^2 \phi + \dots\right) = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

$$\int_0^{\phi} d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{\phi} \Theta^2 \sin^2 \phi d\phi + \dots \int_0^{\phi} \dots d\phi = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

$$\phi + \frac{1}{2} \Theta^2 \int_0^{\phi} \sin^2 \phi d\phi + \dots \int_0^{\phi} \dots d\phi = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

il secondo integrale si risolve sostituendo

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\phi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\phi} \sin^2 \phi d\phi &= \frac{1}{2} \int_0^{\phi} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \\ &= \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{\phi} \cos 2\phi d2\phi = \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_0^{\phi} d\phi \left(1 + \frac{1}{2} \Theta^2 \sin^2 \phi + \dots\right) = \phi + \frac{1}{2} \Theta^2 \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi + \dots \right) = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

A noi non interessa ora la soluzione $\phi(t)$, ma solo il periodo delle oscillazioni, che si ricava immediatamente ponendo $\phi = 2\pi$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\Theta^2}{4} + \dots \right)$$

Dove $\Theta = \sin(\theta_{\max}/2)$, e quindi $\frac{\Theta^2}{4} = 0.001$ per $\theta_0 \approx 8^\circ$ e $\frac{\Theta^2}{4} = 0.002$ per $\theta_0 \approx 10^\circ$.