

La Rappresentazione dei dati

Corso di *Fondamenti di Informatica*
(R. BASILI)

Rappresentazione

- Una rappresentazione si stabilisce tra
 - un *oggetto da rappresentare* (significato) ed
 - un *simbolo* (potenzialmente complesso) *che lo rappresenta* (significante)

Il bimbo che gioca con un sasso lo identifica a seconda della situazione con un'arma o con un'auto

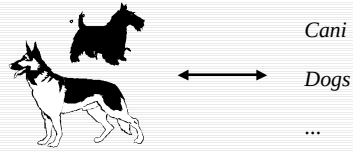
Rappresentazione

- Espressività
- Univocità' (====> *Biettività' !!*)



Rappresentazione

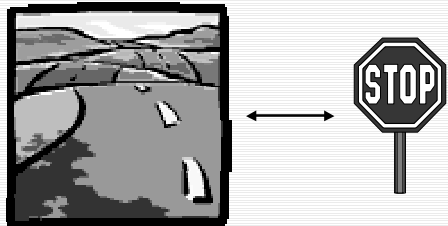
- L'Associazione e' Arbitraria



The diagram illustrates an arbitrary association. On the left, there is a black and white illustration of a dog. A double-headed arrow points from the dog to the text on the right, which includes the words "Cani", "Dogs", and an ellipsis "...".

Rappresentazione

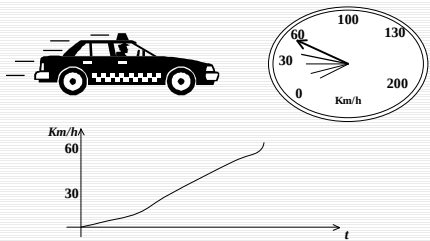
- Rappresentazione Iconica



The diagram illustrates an iconic representation. On the left is a black and white photograph of a winding road with hills in the background. A double-headed arrow points from the photograph to a stop sign on the right.

Rappresentazione

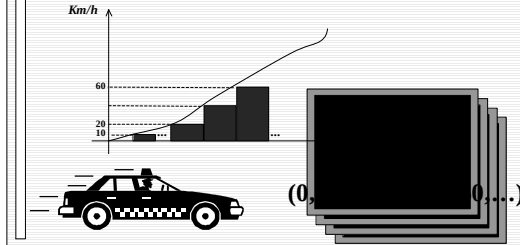
- Analogica



The diagram illustrates an analogical representation. It features three elements: a car on the left, a speedometer in the top right, and a speed-time graph in the bottom left. The speedometer is a circular gauge with markings at 0, 30, 60, 100, 130, and 200 Km/h. The graph has a vertical axis labeled "Km/h" with markings at 30 and 60, and a horizontal axis labeled "t". A curve on the graph starts at the origin and rises steeply.

Rappresentazione

■ Digitale



Rappresentazione dei dati

■ Dati Numerici

- Numeri Naturali
- Numeri Interi (con segno)
- Numeri Razionali

■ Dati non Numerici

- Testo
- Grafica

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali

- **Alfabeto, A**
 - Un insieme finito di B simboli, $A = \{a, b, \dots\}$
- **Sequenze o Stringhe in A , A^***
 - n -ple, $(a_0, \dots, a_{n-1})$ con $a_i \in A$, ed $n \geq 0$

- **Valore**, cioè la funzione di rappresentazione:

$$\text{val} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$$
$$\text{data da: } \text{val}((a_0, \dots, a_{n-1})) = \sum_{i=0}^n a_i B^i$$

B è detta Base

Alfabeti e Stringhe

■ Esempio: Alfabeto A

$A = \{a\}$

$A^* = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$;

oppure:

$A = \{a, b\}$

$A^* = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, abb, \dots\}$

Rappresentazione come funzione

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali $\{0, 1, 2, \dots\}$.

- Una *rappresentazione* di $\mathbb{N}$ è una funzione iniettiva

$$r : \mathbb{N} \rightarrow A^*$$

- che possiede la funzione inversa (*valore*)

$$\text{val} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$$

- tale che, data $\sigma \in A^*$,

$$\text{val}(\sigma) = \begin{cases} n \in \mathbb{N} & \text{se } r(n) = \sigma \\ \text{indefinito} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 10

- Alfabeto, $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

- Sequenze o Stringhe in A, A^*

■ es. $(197) = 197$, $(1389) = 1389$

- Valore, $\text{val}((a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$

es. $\text{val}(197) = 7 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$

$\text{val}(1389) = 9 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 8

- Alfabeto, $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 7\}$

- Sequenze o Stringhe in A , A^*

■ es. $(127) = 127$, $(13) = 13$, ~~(183) e' NON VALIDA!!~~

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 8^i$

es. $val(127) = 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 = 7 + 16 + 64 = 87$

$val(13) = 3 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^1 = 11$

~~$(127)_8 = (87)_{10}$~~ ~~$(13)_8 = (11)_{10}$~~

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 2

- Alfabeto, $A = \{0, 1\}$

- Sequenze o Stringhe in A , A^*

■ es. $(101) = 101$, $(10) = 10$, ~~(13) e' NON VALIDA!!~~

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$

es. $val(101) = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 1 + 4 = 5$

$val(10) = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 2$

~~$(101)_2 = (5)_{10}$~~ ~~$(10)_2 = (2)_{10}$~~

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Naturali - Base 16

- Alfabeto, $A = \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

- Sequenze o Stringhe in A , A^*

■ es. $(10E4) = 10E4$, ~~$(G3)$ e' NON VALIDA!!~~

- Valore, $val((a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=0}^n a_i 16^i$

ES. $val(10E4) = 4 \cdot 16^0 + 14 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^3 =$

$= 4 + 224 + 4096 = 4324$

~~$(10E4)_{16} = (4324)_{10}$~~

Rappresentazione dei dati

■ Numeri con la virgola - Base 2

- Alfabeto, $A = \{0,1\}$

- Sequenze o Stringhe in A , A^*

■ es. $(10.1) = 10.1$

~~(0.3) e' NON VALIDA!~~

- Valore, $val((a_{-m}, \dots, a_0, \dots, a_n)) = \sum_{i=-m}^n a_i 16^i$

ES. $val(10.1) = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 =$
 $= 0.5 + 0 + 2 = 2.5$

$(10.1)_2 = (2.5)_{10}$

Rappresentazione Binaria

■ In Base 2.

■ *Cifre Binarie* o *Binary Digits (bits)*

■ Cambiamento di base

- $2 \Rightarrow 10$

- $10 \Rightarrow 2$

■ Valori decimali (Virgola fissa)

■ Casi particolari

Rappresentazione Binaria

■ Parole di memoria di dimensione fissa, o rappresentazione su k bit

■ Max e Min numero rappresentabile

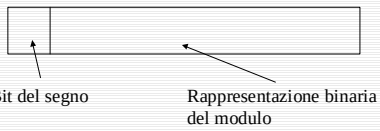
■ Operazioni

■ Il problema del *trabocco (overflow)*

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Modulo e segno



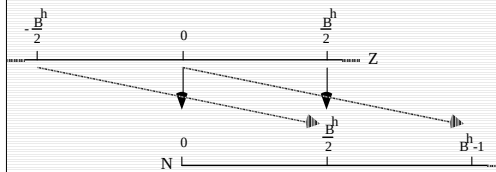
Es. $r_{ms}(5) = 000101$

Es. $r_{ms}(-5) = 100101$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento a una base B (su h cifre)



Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento a una base B (su h cifre)

$$r_c(x) = \begin{cases} r_B(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{B^h}{2} \\ r_B(B^h - |x|) & \text{se } -\frac{B^h}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno

- Complemento alla base 2 (su h cifre)

$$-r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^h}{2} = 2^{h-1} \\ r_2(2^h - |x|) & \text{se } -\frac{2^h}{2} = -2^{h-1} \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)

$$-r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)

- Sia $x = (5)_{10}$, si ha $0 < 5 < 8$ quindi

$$-r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$$

- $r_c(x) = r_2(x) = (0101)$

Rappresentazione dei dati

■ Interi con segno (Esempio)

- Complemento alla base 2 (su 4 cifre)
- Sia $x = (-5)_{10}$ si ha $-8 < -5 < 0$ quindi
- $r_c(x) = \begin{cases} r_2(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{2^4}{2} = 8 \\ r_2(2^4 - |x|) & \text{se } -\frac{2^4}{2} = -8 \leq x < 0 \end{cases}$
- $r_c(x) = r_2(2^4 - |x|) = r_2(16 - |-5|) = r_2(11) = (1011)_2$

Rappresentazione dei dati

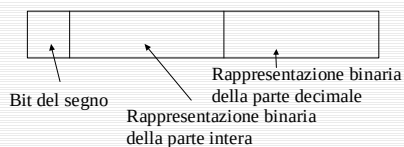
■ Interi con segno - Min e Max

- Complemento alla base 2 (su k cifre)
- MIN: $(100\dots 0)$
- MAX: $(011\dots 1)$
- Es. $k=7$ MIN = $(1000000) \implies (-2^{7-1}) = -64$
- MAX = $(0111111) \implies (2^{7-1} - 1) = 63$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali

- Virgola fissa



Es. $r_{mf}(2.5) = 00010.10\dots$ Es. $r_{mf}(-2.5) = 10010.10\dots$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Quanti diversi numeri posso rappresentare?

k bit per la parte intera e h per la parte decimale

====> ho $2^{(k+h)}$ numeri diversi

Es. $k=2$ $h=5$ ====> ho 27 = 128 numeri razionali diversi

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Quale max e min ?

k bit per la parte intera

====> min = 0 max = $2^k - 1$

h per la parte decimale

====> min = 0 max = $1 - 2^{-h}$

Es. $k=2$ $h=5$ ====> min = 0 max = $(2^2 - 1) + (1 - 2^{-5}) = 3.96875$

Parte Intera

Parte Decimale

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Qual è la distanza tra due numeri razionali rappresentati?

Se ho h bit per la parte decimale

====> $r(x) - r(x_{\text{succ}}) = 0 \dots 0, \dots 1 = 2^{-h}$

Es. $k=2$ $h=5$ ====> $r(x) - r(x_{\text{succ}}) = (0.00001)_2 = 2^{-5} = (0.03125)_{10}$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - modulo e segno

- Qual è la distanza tra due numeri razionali rappresentati?

Se ho h bit per la parte decimale

$$\implies r(x) - r(x_{\text{succ}}) = 0 \dots 0, \dots 1 = 2^{-h}$$



Es. $k=2$ $h=5 \implies r(x) - r(x_{\text{succ}}) = (0.00001)_2 = 2^{-5} = (0.03125)_{10}$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali

- Virgola Mobile $x = \pm m B^e$

0/1	m	e
segno	Rappresentazione binaria della mantissa	Rappresentazione binaria dell'esponente

Es: $123,45 = 0,12345 \cdot 10^3$ $X = 0,000045 = 0,45 \cdot 10^{-4}$
 $r_{vm}(123,45) = \langle +, 12345, 3 \rangle$ $r_{vm}(X) = \langle +, 45, -4 \rangle$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$

m ed e hanno dimensione fissa, h e k rispettivamente

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)

m : min $\langle 1 \dots 0 \rangle 2^{-1}$
 max $\langle 1 \dots 1 \rangle = 2^{h-1}$

e : min $\langle 10 \dots 0 \rangle - 2^{k-1}$
 max $\langle 01 \dots 1 \rangle = 2^{k-1} - 1$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$
- m ed e hanno dimensione fissa, h e k rispettivamente

0/1	m	e
-----	-----	-----

segno Mantissa (h) Esponente (k)

m: min = (1...0) = 2^{-1} e: min = (10...0) = -2^{k-1}
 max = (1...1) = $2^h - 1$ max = (01...1) = $2^{k-1} - 1$

x: min = $m_{\min} 2^{e_{\min}} = 2^{-1} \cdot 2^{-2^{k-1}} = 2^{-2^{k-1}-1}$

x: max = $m_{\max} 2^{e_{\max}} = (2^h - 1) \cdot 2^{2^{k-1}-1}$

Rappresentazione dei dati

■ Numeri Razionali - Virgola Mobile

- $x = \pm m 2^e$

0/1	m	e
-----	-----	-----

segno Mantissa (h) Esponente (k)

x: min = $m_{\min} 2^{e_{\min}} = 2^{-1} \cdot 2^{-2^{k-1}} = 2^{-2^{k-1}-1}$
 x: max = $m_{\max} 2^{e_{\max}} = (2^h - 1) \cdot 2^{2^{k-1}-1}$

Per $h=2, k=5$ x: min = $2^{-1} \cdot 2^{-2^{5-1}} = 2^{-2^{5-1}-1} = 2^{-16-1} = 2^{-17}$
 x: max = $(2^2 - 1) \cdot 2^{2^{5-1}-1} = 3 \cdot 2^{16-1} = 3 \cdot 2^{15}$

Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

- Due numeri successivi

$$x = \pm m 2^e \quad x_{\text{succ}} = \pm m' 2^{e'}$$

hanno lo stesso esponente e e mantisse m e m' successive

$$x = \pm m 2^e \quad x_{\text{succ}} = \pm m_{\text{succ}} 2^e$$

$$m: (1...0) = 2^{-1} \quad m_{\text{succ}} = (10...1) = 2^{-1} + 2^{-h} \\ \Rightarrow x - x_{\text{succ}} = (m - m_{\text{succ}}) 2^e = (0...01) 2^e = 2^{-h} 2^e \begin{cases} e_{\text{MIN}} \\ e_{\text{MAX}} \end{cases}$$

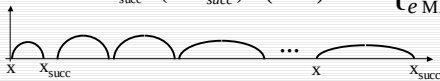
Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

– Due numeri successivi

$x = \pm m 2^e$ $x_{succ} = \pm m_{succ} 2^e$
hanno lo stesso esponente e e mantisse m e m' successive

$m: (1 \dots 0) = 2^{-1}$ $m_{succ} = (10 \dots 1) = 2^{-1} + 2^{-h}$
 $\Rightarrow x - x_{succ} = (m - m_{succ}) 2^e = (0 \dots 01) 2^e = 2^{-h} 2^e \begin{cases} e \text{ MIN} \\ e \text{ MAX} \end{cases}$



Rappresentazione dei dati

■ Virgola Mobile - Distanza

– Il formato IEEE $x = \pm m 2^e$

0/1	m	e
segno	Mantissa (h)	Esponente (k)

$h = 23$ $x: \min 2^{-1} 2^{-2^k-1} = 2^{-2^k-1} = 2^{-2^7-1} = 2^{-129}$
 $k = 8$ $x: \max (2^h-1) \cdot 2^{2^k-1} = (2^{23}-1) \cdot 2^{127} = !!!$

Es. $(13.25)_{10} \Rightarrow 0 \ 101110000000000000000000 \ 11111100$
