

Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

Prova scritta del 24 Giugno 2007, tempo disponibile 90 minuti.

Problema 1

Si consideri una particella di massa m in 2 dimensioni agganciata ad una molla di costante elastica k , lunghezza a riposo $\bar{\rho}$ e con un estremo vincolato nell'origine.

- 1) Scrivere la Lagrangiana del problema in coordinate polari (ρ, θ)
- 2) Ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange
- 3) Se $\rho(0) = \rho_0$ e $\dot{\rho}(0) = 0$, esiste una condizione iniziale per la velocità angolare iniziale $\dot{\theta}(0)$ tale per cui $\rho(t) = \rho_0$ a tutti i tempi? Se sì, determinarla e calcolare il valore corrispondente di $\dot{\theta}(0)$.

Problema 2

Per l'oscillatore armonico calcolare gli elementi di matrice $(\hat{x}^2)_{00}, (\hat{x}^2)_{11}, (\hat{x}^2)_{22}, (\hat{x}^2)_{02}$.

Problema 3

Un rotatore rigido 3d di Hamiltoniano $H_0 = \frac{L^2}{2I}$ viene debolmente perturbato da

$$H' = \lambda \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta,$$

dove λ è un parametro. a) Che significato fisico può avere una tale perturbazione? b) Calcolare l'effetto di H' sul livello fondamentale.

N.B. $Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

Svolgimento Problema 1

- 1) La Lagrangiana del problema in coordinate polari e' $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(\rho - \bar{\rho})^2$.
 2) Le equazioni di Eulero Lagrange forniscono

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\theta}^2 - k(\rho - \bar{\rho}), \quad (1)$$

$$\rho^2\dot{\theta} = A = cost \quad (2)$$

- 3) Affinche' $\rho(t) = \rho_0$ sia soluzione e' necessario scegliere la costante A in modo tale che

$$\frac{mA^2}{\rho_0^3} - k(\rho_0 - \bar{\rho}) = 0 \Rightarrow A^2 = \frac{k}{m}\rho_0^3(\rho_0 - \bar{\rho}) \Rightarrow \dot{\theta}(0) = \pm\sqrt{\frac{k(\rho_0 - \bar{\rho})}{m\rho_0}} \quad (3)$$

Dunque la soluzione esiste solo per $\rho_0 > \bar{\rho}$.

Svolgimento Problema 2

Usando la matrice di $\hat{x}$ o l'operatore $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ (pag. 157 del libro) si trova: $(\hat{x}^2)_{00} = \frac{1}{2}x_0^2, (\hat{x}^2)_{11} = \frac{3}{2}x_0^2, (\hat{x}^2)_{22} = \frac{5}{2}x_0^2, (\hat{x}^2)_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0^2$.

Svolgimento Problema 3

a) Il rotatore ha un dipolo elettrico e si trova in un campo elettrico esterno. Infatti $\cos\theta \sim z$ e' una componente del dipolo. b) Lo stato fondamentale e' l'armonica $|l=0\rangle = Y_{00}$, e quindi $\langle z \rangle = 0$ e bisogna considerare il secondo ordine. La perturbazione va come $|l=1, m=0\rangle = Y_{10}$ e le armoniche sferiche sono ortogonali; allora

$$\Delta E_0 = -\frac{|\langle l=0|H'|l=1, m=0\rangle|^2}{\frac{2\hbar^2}{2I}} = -\frac{I\lambda^2}{\hbar^2} \int d\Omega \frac{1}{4\pi} Y_{10}^2 = -\frac{I\lambda^2}{4\pi\hbar^2}.$$

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
1-Caputo Fanny	9	10	9	28
2-Cianmbella Elena	1	5	5	11
3-Ciambella Laura	3	8	4	15
4-D'Amico Liliana	2	10	3	15
5-Garraffo Matteo	2	2	2	6
6-Magistri Daniele	1	10	2	13
7-Marrani Marco	3	10	6	19
8-Mauretti Arianna	7	9	5	21
9-Pasquini Luca	2	10	1	13
10- Serrano Giulia	4	10	4	18
11-Tofani Francesca	3	10	4	17
12-Vitale Marco	3	10	2	15
13-Zurlo Francesca	5	10	5	20

Per gli studenti che hanno un punteggio < 15 si consiglia di ripresentarsi allo scritto . Quelli che intendono sostenere l'orale sono invitati a prenotarsi on-line.

Il docente
Prof. Michele Cini