

Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

Prova scritta del 26 Luglio 2008, aula 29, tempo disponibile 90 minuti.

Problema 1

La matrice hamiltoniana di un sistema quantistico può essere scritta

$$H = -g \frac{B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g > 0.$$

a) dare una possibile interpretazione fisica di H , ricordando che

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e' la matrice della componente x del momento angolare 1. b) Calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media $\langle H \rangle$ in funzione della temperatura.

Problema 2

Si consideri una particella di massa m e carica q vincolata sul piano $x-y$ in presenza di un campo elettrico $\mathbf{E} = (-\frac{m\omega^2}{q}x, 0, 0)$ e di un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Così, $\mathbf{E}$ e' diretto lungo l'asse x mentre $\mathbf{B}$ e' diretto lungo l'asse z .

1) Verificare che il potenziale scalare $V = \frac{m\omega^2}{2q}x^2$ ed il potenziale vettore $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ forniscono i campi elettromagnetici di cui sopra.

2) Scrivere la Lagrangiana del problema e ricavare le equazioni di Eulero-Lagrange.

3) Dalle equazioni di Eulero-Lagrange ottenere un'equazione per $v_x = \dot{x}$. 4) Risolvere le equazioni di Eulero-Lagrange con le condizioni iniziali $x(0) = r$, $y(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -\omega_B r$ con $\omega_B = \frac{qB}{mc}$ frequenza di ciclotrone. 5) Qual'e' la curva che descrive la traiettoria della particella?

I punti 4) e 5) sono facoltativi.

Problema 3

Dato l'oscillatore armonico 2d di hamiltoniana:

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

a) scrivere gli autovalori di H_0 b) scrivere in coordinate cartesiane le autofunzioni dei 3 livelli piu' bassi in termini di quelle $\psi_n(x), \psi_n(y)$ dell'oscillatore 1d.

c) Si consideri la perturbazione

$$H' = \lambda x^2 y^2.$$

Qual'e' l'effetto al primo ordine sugli autovalori dell'energia del secondo livello eccitato? Si tenga conto che per l'oscillatore armonico 1d si trova: $(\hat{x}^2)_{00} = \frac{1}{2}x_0^2$, $(\hat{x}^2)_{11} = \frac{3}{2}x_0^2$, $(\hat{x}^2)_{22} = \frac{5}{2}x_0^2$, $(\hat{x}^2)_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}x_0^2$, dove $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$; x^2 ha elementi di matrice nulli fra stati di parita' opposta.

Svolgimento Problema 1

a) $H = -gBL_x$ puo' rappresentare uno spin 1 in un campo magnetico diretto lungo l'asse x. b) Gli autovalori dell'energia sono $E_1 = -gB, E_2 = 0, E_3 = gB$. Quindi $Z = e^{\beta gB} + 1 + e^{-\beta gB}$ da cui e' immediato ricavare che $\langle H \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{gB(e^{\beta gB} - e^{-\beta gB})}{e^{\beta gB} + 1 + e^{-\beta gB}}$.

Svolgimento Problema 2

1) Per il campo elettrico si ha $E_x = -\frac{\partial}{\partial x}V = -\frac{m\omega^2}{q}x, E_y = -\frac{\partial}{\partial y}V = 0, E_z = -\frac{\partial}{\partial z}V = 0$, mentre per il campo magnetico si ha $B_x = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y = 0, B_y = -\frac{\partial}{\partial x}A_z + \frac{\partial}{\partial z}A_x = 0, B_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = B$.

2) La Lagrangiana del sistema e' $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\omega_B(-\dot{x}y + \dot{y}x) - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ e pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\ddot{x} - \omega_B \dot{y} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_B \dot{x} = 0.$$

Si poteva scrivere subito quanto sopra ricordando dalla teoria (pag.27 del testo) che questa Lagrangiana da' le equazioni del moto con la forza di Lorentz. 3) Differenziando la prima equazione e sostituendo a $\ddot{y}$ il valore ottenibile dalla seconda equazione si ottiene un'equazione per $v_x = \dot{x}$ della forma di un oscillatore armonico, cioe' $\ddot{v}_x + \Omega^2 v_x = 0$, con $\Omega^2 = \omega_B^2 + \omega^2$.

4) La soluzione piu' generale e' $v_x(t) = \alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t$ e tenendo conto del fatto che $v_x(0) = 0$ si trova $\alpha = 0$. Per calcolare β e' necessario determinare $\dot{v}_x(0) = \ddot{x}(0) = \omega_B \dot{y}(0) - \omega^2 x(0) = -\omega_B^2 r - \omega^2 r = -\Omega^2 r$ e pertanto $\beta = -\Omega r$. Ne segue che $x(t) = r + \int_0^t v_x(t') dt' = r \cos \Omega t$ mentre $\dot{y}(t) = \dot{y}(0) - \omega_B(x(t) - x(0)) = -\omega_B r - \omega_B r(\cos \Omega t - 1) = -\omega_B r \cos \Omega t$ da cui segue che $y(t) = -\frac{\omega_B}{\Omega} r \sin \Omega t$. 5) La traiettoria e' dunque un ellisse.

Svolgimento Problema 3

a) $E_{mn}^0 = (m+n+1)\hbar\omega$. b) stato fondamentale: $\psi_0(x)\psi_0(y)$; primo livello eccitato:

$$\begin{cases} \psi_1(x)\psi_0(y) \\ \psi_0(x)\psi_1(y) \end{cases}$$

Secondo livello eccitato: una base e'

$$\begin{cases} \langle (x, y) | 1 \rangle = \psi_1(x)\psi_1(y) \\ \langle (x, y) | 2 \rangle = \psi_2(x)\psi_0(y) \\ \langle (x, y) | 3 \rangle = \psi_0(x)\psi_2(y) \end{cases}$$

c) Pertanto, su questa base, la matrice della perturbazione e'

$$\lambda \begin{pmatrix} (x^2)_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^2)_{22}(x^2)_{00} & (x^2)_{20}^2(x^2)_{02}^2 \\ 0 & (x^2)_{20}^2(x^2)_{02}^2 & (x^2)_{22}(x^2)_{00} \end{pmatrix} = \lambda x_0^4 \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

La perturbazione risolve la degenerazione completamente. $|1\rangle$ rimane da solo, con un autovalore corretto $3\hbar\omega + \frac{9}{4}\lambda x_0^4$, mentre gli altri due si mischiano e danno livelli $3\hbar\omega + \frac{7}{4}\lambda x_0^4$ e $3\hbar\omega + \frac{3}{4}\lambda x_0^4$.

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
2-Ciambella Elena	5	4	3	12
3-Ciambella Laura	8	5	3	16
5-Garraffo Matteo	3	4	1	8
9-Pasquini Luca	5	3	2	10

Per gli studenti che hanno un punteggio < 15 e' consigliabile ripresentarsi allo scritto .

*Il docente
Prof. Michele Cini*