

Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

Prova scritta del 20 Febbraio 2007, tempo disponibile 90 minuti.

Problema 1

Un punto materiale di massa m compie un moto unidimensionale, lungo l'asse verticale z . Esso si trova in un campo di gravita' con energia potenziale $U(z) = mgz$ e cade per un tempo T .

- a) Si determinino la Lagrangiana e l'integrale d'azione lungo la traiettoria fisica (supponendo $\dot{z}(0) = 0$)
 - b) e lo si confronti con quello che si ottiene lungo un cammino virtuale che abbia gli stessi estremi ma sia percorso a velocita' costante.
 - c) Qual'e' l'integrale d'azione maggiore? Commentare il risultato.
-

Problema 2

Per un atomo di Idrogeno di Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

si consideri una funzione di prova gaussiana $\psi(r) = Ne^{-(\frac{r}{a})^2}$.

- a) Si determini N ,
- b) Si determini il valore di aspettazione dell'energia.
- c) Si determini il valore di a ottimale in senso variazionale
- d) si confronti il valore ottimale dell'energia con il risultato esatto.

Saranno utili le seguenti identita':

$$e^{-\frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \right) \right) = e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \frac{4x^2 - 6a^2}{a^4}$$

$$\int_0^\infty dx x e^{-\frac{2x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{4}$$

$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} = \frac{a^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty dx x^4 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} = \frac{3a^5}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Svolgimento Problema 1

La traiettoria fisica e' data da $\ddot{z} = -g$, $\dot{z} = -gt$, $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Quindi, l'energia cinetica e' $K(t) = \frac{1}{2}m(gt)^2$ e quella potenziale $U(t) = -mg\frac{1}{2}gt^2$; la Lagrangiana viene $L(t) = mg^2t^2$ quindi $S = \int_0^T L(t)dt = \frac{1}{3}mg^2T^3$. Il cammino virtuale che conduce a $z(T) = -\frac{1}{2}gT^2$ ha una velocita' media $\bar{v} = \frac{z(T)}{T}$ e $U(t) = mg\bar{v}t$. Pertanto $L(t) = \frac{1}{8}mg^2T^2 + \frac{1}{2}mg^2Tt$ e viene $S = \frac{3}{8}mg^2T^3$. Poiche' $3/8=0.375$ mentre $1/3 \sim 0.3333$, il risultato e' in accordo col principio di minima azione.

Svolgimento Problema 2

Imponendo la condizione di normalizzazione $4\pi N^2 \int_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} = \frac{a^3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$ si trova $N = \sqrt{\frac{1}{a^3}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}$. La media dell'energia cinetica viene (con $e=1$)

$$T[a] = -\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi N^2 \int_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \right) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi N^2 \int_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \frac{4x^2 - 6a^2}{a^4} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{ma^2}.$$

L'energia viene: $E(a) = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{ma^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{a}$. Imponendo $\frac{dE}{da} = 0$ si trova che $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{m}$. Il minimo dell'energia viene $E = -\frac{4}{3\pi} \frac{me^2}{\hbar^2} \sim -0.424413$ Hartree (il risultato esatto e' -0.5 Hartree, come e' noto).

VALUTAZIONE

prova scritta

Il docente
Prof. Michele Cini