

Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

Prova scritta del 19 Febbraio 2008, ore 10,00, aula 22, tempo disponibile 90 minuti.

Problema 1

Sia dato un sistema quantistico di Hamiltoniano $\hat{H}$ tale che

$$\begin{cases} \hat{H}|0\rangle = 0, \\ \hat{H}|n\rangle = n! Q|n\rangle \quad , n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

con $Q > 0$. 1) Si calcoli la correzione del primo ordine $\delta\varepsilon_1$ all'energia dello stato fondamentale indotta dalla perturbazione

$$\hat{V} = V \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n/2} (|n\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle n|)$$

dove $V > 0$. 2) Si calcoli la correzione del secondo ordine $\delta\varepsilon_2$ all'energia dello stato fondamentale. 3) Per quale valore di α la correzione $\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2$ è nulla?

Problema 2

Sia data una particella di spin 1/2 descritta dall'Hamiltoniana

$$H(t) = -\mu\sigma_z B_1,$$

dove σ_z è la matrice di Pauli per la componente z dello spin e B_1 un campo costante. Al tempo $t = 0$ la probabilità di trovare la particella con spin $+\hbar/2$ lungo l'asse x è pari ad 1.

1) Risolvere l'equazione di Schrödinger per lo spinore $\psi = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ e calcolare $\psi(T)$.

L'evoluzione prosegue in modo discontinuo con l'Hamiltoniana che dipende dal tempo t secondo la legge:

$$H(t) = \begin{cases} -\mu\sigma_z B_1 & t < T \\ +\mu\sigma_z B_2 & t > T \end{cases}.$$

2) Calcolare $\psi(2T)$.

3) Quanto deve valere B_2 affinché una misura dello spin lungo l'asse y al tempo $t = 2T$ dia con certezza $-\hbar/2$?

Problema 3

In un sistema inerziale, un punto materiale classico confinato ad un piano (x_0, y_0) ha lagrangiana

$$L_0(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = \frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) - \frac{1}{2}m\Omega^2(x_0^2 + y_0^2).$$

Si chiede di:

a) risolvere le equazioni del moto con le condizioni iniziali $x_0(0) = 0, y_0(0) = r, \dot{x}_0(0) = r\Omega, \dot{y}_0(0) = 0$ e dire qual'è la traiettoria;

b) esprimere l'energia cinetica nel sistema di riferimento (x, y) rotante in senso orario con pulsazione ω definito da

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t) - y_0 \sin(\omega t) \\ y = x_0 \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t), \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\ y_0 = -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t), \end{cases}$$

c) notando che $(x_0^2 + y_0^2) = (x^2 + y^2)$, scrivere la lagrangiana nel sistema di riferimento (x, y) .

d) nel sistema rotante ricavare le equazioni del moto

e) identificare la forza centrifuga e quella di Coriolis.

f) Supponiamo ora $\Omega = \omega$. Che diventa nel sistema rotante la soluzione a)?

Svolgimento Problema 1

Lo stato fondamentale e' $|0\rangle$ ed ha energia nulla. La correzione del primo ordine e' data da

$$\delta\varepsilon_1 = \langle 0|\hat{V}|0\rangle = 2V$$

mentre quella del secondo ordine da

$$\delta\varepsilon_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle 0|\hat{V}|n\rangle|^2}{-Qn!} = -\frac{V^2}{Q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = -\frac{V^2}{Q}(e^\alpha - 1)$$

Il valore di α per il quale la correzione totale e' nulla lo si ottiene da $\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 = 0$ e risulta essere $\alpha = \log(\frac{2Q+V}{V})$

Svolgimento Problema 2

Al tempo zero la funzione d'onda della particella e' $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tempi $t > T$ avremo

$$\psi(t) = \frac{e^{-i\mu B_1 T + i\mu B_2(t-T)}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{2i\mu B_1 T - 2i\mu B_2(t-T)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Affinche' al tempo $t = 2T$ si abbia probabilita' 1 di misurare $-\hbar/2$ lungo l'asse y deve essere $\psi(2T) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ con α fase arbitraria. La condizione e' $e^{\frac{2i\mu T}{\hbar}(B_1 - B_2)} = i$. E' allora immediato ricavare che $B_2 = B_1 + \frac{\pi}{4\mu T} + \frac{n\pi}{\mu T}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Svolgimento Problema 3

a) $\ddot{x}_0 = -\Omega^2 x_0, \ddot{y}_0 = -\Omega^2 y_0$ con le condizioni iniziali determina la soluzione $x_0(t) = r \sin(\Omega t), y_0(t) = r \cos(\Omega t)$. La traiettoria e' circolare di raggio r . b) Per sostituzione si trova:

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2 + y^2) - 2\omega(xy - yx).$$

c) Quindi:

$$L_0(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\omega(y\dot{x} - x\dot{y})] + \frac{1}{2}m(\omega^2 - \Omega^2)(x^2 + y^2).$$

d) Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\omega^2 - \Omega^2)x - 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = (\omega^2 - \Omega^2)y + 2\omega\dot{x}, \end{cases}$$

d) i termini in ω^2 sono quelli centrifughi e quelli lineari in ω di Coriolis. f) Nel caso $\omega = \Omega$, la soluzione a) diventa $(x, y) = (0, r)$, ed in effetti

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = 2\omega\dot{x}, \end{cases}$$

e' banalmente risolta. Il punto percorre una circonferenza nel sistema inerziale ed e' fermo nel sistema rotante.

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Liliana D'Amico	2	2	2	6/30
Marco Di Giovannantonio	8	8	4	20/30
Matteo Garruffo	2	2	2	6/30
Marco Vitale	2	2	2	6/30

Il docente
Prof. Michele Cini