

# Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

*Prova scritta del 19 Giugno 2007, tempo disponibile 90 minuti.*

## Problema 1

Si vuol preparare fascio di atomi di Ag in uno stato di spin alto lungo la direzione  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni: i) la probabilit   $P(z, \uparrow)$  che una misura della componente z dello spin dia come risultato  $\uparrow$  deve essere 1/4 ii) la probabilit   $P(y, \uparrow)$  che una misura della componente y dello spin dia come risultato  $\uparrow$  deve essere estrema. Come devono essere presi gli angoli? (Basta una soluzione).

## Problema 2

Dato un sistema unidimensionale con lunghezza caratteristica  $L$  e Hamiltoniano

$$H = \hat{T} + \hat{V}; \quad \hat{T} = \frac{p^2}{2m}; \quad \hat{V} = \frac{\hbar^2}{6mL^6}x^4,$$

si calcoli la migliore stima variazionale allo stato fondamentale utilizzando la funzione di prova

$$\phi(x) = Ae^{-bx^2}.$$

Confrontando con un oscillatore armonico per cui  $L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  discutere come cambia l'energia dello stato fondamentale.

## Problema 3

E' dato un sistema classico di N particelle in 1 dimensione con lunghezza caratteristica  $L_0$ , confinato fra  $x = 0$  e  $x = L$ ; l'Hamiltoniana e'

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha \log \frac{x}{L_0}, \quad \alpha > 0.$$

Si calcoli l'equazione di stato dalla formula per la pressione  $P = KT \frac{\partial}{\partial L} \log Z$ , con  $Z$  funzione di partizione.

### Svolgimento Problema 1

Lo stato di spin alto e' dato da  $|\uparrow, \vec{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$ , quindi si richiede  $\cos^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos(\frac{\theta}{2}) = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$  oppure  $\frac{\theta}{2} = \frac{2\pi}{3}$  e poiche'  $\theta \leq \pi$  si deve prendere  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$  e quindi  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  e risulta  $\sin(\frac{\theta}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . L'autostato di spin alto lungo y e'  $|\uparrow, y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ . Pertanto  $P(y, \uparrow) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3} \sin \phi)^2 + \frac{3}{4} \cos^2 \phi$ ; derivando si trova la condizione  $\cos \phi = 0$  quindi  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

### Svolgimento Problema 2

Come'e noto,  $A = (\frac{2b}{\pi})^{1/4}$ . Inoltre,  $\langle \hat{T} \rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m}$ , e  $\langle \hat{V} \rangle = \frac{\hbar^2}{32mL^6} b^2$ . Imponendo  $\frac{\partial E}{\partial b} = 0$  con  $E = \langle \hat{T} + \hat{V} \rangle$ , si trova

$$b = \frac{1}{2L^2}$$

e quindi  $E = \frac{3}{8} \frac{\hbar^2}{mL^2}$ . Per  $L = x_0$   $E = \frac{3}{8} \hbar \omega < \frac{1}{2} \hbar \omega$  perche' il potenziale e' piu' piatto per  $x$  piccoli.

### Svolgimento Problema 3

$$Z = \frac{1}{h} \int dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \int_0^L dx e^{\alpha \beta \log(\frac{x}{L_0})} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}} \frac{L^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1} \frac{1}{L_0^{\alpha\beta}}.$$

Quindi,  $PL = NKT(1 + \frac{\alpha}{KT})$ .

---

## VALUTAZIONE

---

prova scritta

---

Il docente  
Prof. Michele Cini