

Esame di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Prof. Michele Cini

Prova scritta del 23/9/ 2008, tempo disponibile 90 minuti.

Problema 1

Una particella quantistica e' confinata a muoversi in 2 dimensioni in una porzione di piano xy di forma quadrata da un potenziale $V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, -\frac{L}{2} < y < \frac{L}{2}, \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$

a) Trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'Hamiltoniano.

b) Disporre 4 elettroni (di spin 1/2) nel sistema secondo il principio dell'*aufbau*. Quali stati vanno ad occupare, e qual'e' l'energia $E(4)$ dello stato fondamentale?

c) Se c'e' un solo elettrone costruire la matrice della perturbazione $H'(x, y) = \lambda X(x)Y(y)$ sulla base degli stati del primo livello eccitato.

d) (facoltativo) Nel caso speciale $H' = \lambda \frac{x y}{L^2}$ come si scinde il primo livello eccitato?

(cenno: $\frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(\frac{\pi}{L}(x + \frac{L}{2})) \sin(\frac{2\pi}{L}(x + \frac{L}{2})) dx = -\frac{16L}{9\pi^2}$, mentre integrando x con una funzione pari si trova 0.)

Problema 2

E' assegnata l'Hamiltoniana classica

$$H(p, q, t) = \frac{(q + \alpha t)^4}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{8} \left(\frac{p}{\alpha t + q} \right)^2 - \alpha p,$$

dove α, ω, μ sono delle costanti. Si scrivano le equazioni del moto dopo aver eseguito la trasformazione canonica che ha la funzione generatrice

$$F(q, Q, t) = Q(\alpha t + q)^2;$$

qui, come nel testo, Q denota la nuova coordinata.

Problema 3

Una astronave A viaggia rispetto ad una stazione spaziale S con velocita v, e al solito ammettiamo che le origini dei due sistemi coincidono ($x_A = x_S = 0$) per $t_A = t_S = 0$. Il pilota piazza due specchi α e β , il primo in testa e l' altro in coda, a distanza $AB = 2l_0$ fra loro. Una sorgente di luce in mezzo all' astronave al tempo $t_A = 0$ emette un segnale che arriva in α e β .

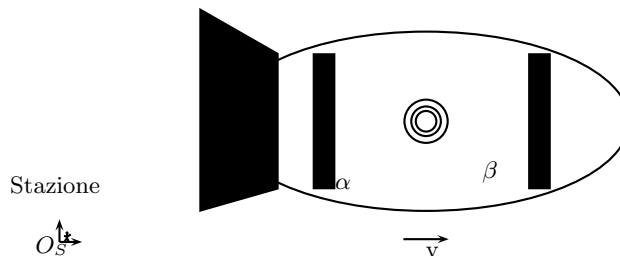
a) Qual'e' la distanza fra gli specchi $2l_S$ misurata nel sistema della stazione spaziale S?

b) Scrivere le coordinate cronotopiche $(x_A(\alpha), t_A(\alpha))$ e $(x_A(\beta), t_A(\beta))$ degli eventi "arrivo della luce su α " e "arrivo della luce su β " misurate su A.

c) Siano $x_S(\alpha), x_S(\beta)$ le coordinate x degli stessi eventi misurate su S. Calcolare $\Delta x = x_S(\beta) - x_S(\alpha)$.

d) $\Delta x \neq 2l_S$. Come si spiega?

e) Dato un evento (x_A, t_A) osservato su A, qual'e' la condizione perche' sia $t_S = 0$? f) Trovare la distanza misurata su S fra gli specchi osservati ambedue per $t_S = 0$.



Svolgimento Problema 1

a) Si separano le variabili, in analogia con il testo, pag. 164; le autofunzioni sono $\psi_{nm}(x, y) = u_n(x)u_m(y)$ con n, m interi positivi, dove $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n}{L}(x + \frac{L}{2}))$; gli autovalori $E_{nm} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n^2 + m^2)$. b) Il livello fondamentale non e' degenero ed il primo eccitato e' 2 volte degenero. Con 4 elettroni, tenuto conto dello spin, 2 vanno nel livello fondamentale e 2 nel primo eccitato e cosi' $E(4) = 2(E_{11} + E_{12})$. c) Per il primo eccitato prendiamo le funzioni di base

$\begin{cases} |1\rangle = u_2(x)u_1(y) \\ |2\rangle = u_1(x)u_2(y) \end{cases}$ e la matrice viene: $\begin{pmatrix} \lambda \langle u_2|X|u_2\rangle \langle u_1|Y|u_1\rangle & \lambda \langle u_2|X|u_1\rangle \langle u_1|Y|u_2\rangle \\ \lambda \langle u_1|X|u_2\rangle \langle u_2|Y|u_1\rangle & \lambda \langle u_1|X|u_1\rangle \langle u_2|Y|u_2\rangle \end{pmatrix}$ d) la matrice di H' viene: $H' = \lambda(\frac{16}{9\pi^2})^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con autovalori $\Delta E_{\pm} = \pm \lambda(\frac{16}{9\pi^2})^2$. Quindi il livello si scinde in due e le energie sono $E_{12} + E_{\pm}$.

Svolgimento Problema 2

Risulta:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = 2Q(\alpha t + q), \longrightarrow \frac{p}{\alpha t + q} = 2Q,$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -(\alpha t + q)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\alpha(\alpha t + q)Q = \alpha p$$

$$\tilde{H} = H + \alpha p = \frac{(q + \alpha t)^4}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{8} \left(\frac{p}{\alpha t + q}\right)^2 = \frac{P^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 Q^2.$$

E' un oscillatore armonico, quindi $\ddot{Q} = -kQ$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

Svolgimento Problema 3

a) Per l'accorciamento relativistico, $l_S = l_0 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$. b) $(x_A(\alpha), t_A(\alpha)) = (-l_0, \frac{l_0}{c})$ e $(x_A(\beta), t_A(\beta)) = (l_0, \frac{l_0}{c})$ c) Trasformando di Lorentz, $x_S(\alpha) = \gamma(x_A(\alpha) + vt_A(\alpha)) = \frac{\gamma l_0}{c}(-c + v)$, $x_S(\beta) = \gamma(x_A(\beta) + vt_A(\beta)) = \frac{\gamma l_0}{c}(c + v)$ e quindi $\Delta x = 2l_0\gamma$ dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. d) I due eventi non sono simultanei in S e l'esperimento non misura la distanza fra gli specchi. e) Da $ct_S = \gamma(ct_A + \frac{v}{c}x_A) = 0$ si deduce che $t_A = -\frac{vx_A}{c^2}$. f) Mettendo $x_A(\alpha) = -l_0, x_A(\beta) = l_0$ nella trasformazione di Lorentz $x_S = \gamma(x_A + vt_A)$ si trova $x_S(\beta) = \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})l_0 = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $x_S(\alpha) = -l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ e la distanza e' (giustamente) $2l_S$.

VALUTAZIONE DELLA PROVA SCRITTA

candidato	<i>problema 1</i> (<i>decimi</i>)	<i>problema 2</i> (<i>decimi</i>)	<i>problema 3</i> (<i>decimi</i>)	<i>voto scritto</i> (<i>trentesimi</i>)
Elena Ciambella	6	5	7	18
Eleonora D'Elia	10	2	2	14
Francesco Di Giacomo	10	10	10	30
Lorenzo Di Mario	5	10	9	24
Francesco Fanicchia	2	10	2	14
Gabriele Lapi	0	8	3	11
Daniele Magistri	2	10	1	13
Stefano Mori	1	10	2	13
Luca Pasquini	0	10	3	13

Si consiglia agli studenti con meno di 15/30 di ripetere lo scritto.

Il docente
Prof. Michele Cini