

§ 14. Moto in un campo centrale

Nel ridurre il problema del moto dei due corpi al problema del moto di un corpo, ci siamo venuti a trovare di fronte al problema della determinazione del moto di una particella in un campo esterno in cui l'energia potenziale della particella dipende soltanto dalla distanza r da un dato punto fisso; un tale campo è detto *centrale*. La forza

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

agente sulla particella, dipende anch'essa, in valore assoluto, da r ed è diretta in ogni punto come il raggio vettore.

Come già è stato detto nel § 9, durante il moto in un campo centrale il momento angolare del sistema rispetto al centro del campo si conserva. Per una particella questo momento angolare è

$$M = [rp].$$

Poiché i vettori M ed r sono mutuamente perpendicolari, la costanza di M significa che durante il moto della particella il suo raggio vettore resta sempre in uno stesso piano perpendicolare ad M .

In tal modo la traiettoria di una particella che si muove in un campo centrale giace tutta in un solo piano. Introducendo le coordinate polari r, φ , la funzione di Lagrange assume la forma [vedi (4,5)]:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (14,1)$$

Questa funzione non contiene in modo esplicito la coordinata φ . Si chiama *ciclica* ogni coordinata generalizzata q_i che non appare in modo esplicito nella funzione di Lagrange. In virtù dell'equazione lagrangiana, per ogni coordinata ciclica q_i si ha:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

cioè l'impulso generalizzato corrispondente $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ è un integrale del moto. Questa circostanza porta ad una semplificazione sostanziale del problema dell'integrazione delle equazioni del moto nel caso in cui esistano le coordinate cicliche.

Nel caso considerato l'impulso generalizzato

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$$

coincide con il momento angolare $M_z = M$ [cfr. (9,6)] e così ritroviamo la legge, che già conosciamo, di conservazione del momento angolare

$$M = mr^2 \dot{\varphi} = \text{costante}. \quad (14,2)$$

Notiamo, che per il moto piano di una particella in un campo centrale, questa legge ammette un'interpretazione geometrica semplice. L'espressione $\frac{1}{2} r \cdot r d\varphi$ rappresenta l'area del settore formato dai due raggi vettori infinitamente vicini e da un elemento d'arco della traiettoria (fig. 8). Indicando questa superficie con df , il momento angolare della particella assume la forma:

$$M = 2mf, \quad (14,3)$$

dove la derivata $\dot{f}$ è detta *velocità areolare*. La conservazione del momento angolare implica dunque la costanza della velocità areolare: in uguali intervalli di tempo il raggio vettore della particella in moto descrive aree uguali (*seconda legge di Keplero*¹⁾).

La soluzione completa del problema del moto di una particella in un campo centrale si ottiene più semplicemente se si parte dalle

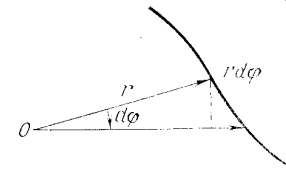


Fig. 8

leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare senza neanche scrivere le equazioni stesse del moto. Esprimendo $\dot{\varphi}$ in funzione di M con la (14,2) e riportando questo valore nell'espressione dell'energia, otteniamo:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (14,4)$$

Da cui

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (14,5)$$

oppure, separando le variabili ed integrando:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{costante}. \quad (14,6)$$

Scrivendo poi la (14,2) nella forma

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt,$$

ponendovi dt dalla (14,5) e integrando, otteniamo:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{costante}. \quad (14,7)$$

Le formule (14,6) e (14,7) danno la soluzione generale del problema posto. La seconda di queste formule determina la relazione tra r e φ , cioè l'equazione della traiettoria. La formula (14,6) determina

¹⁾ La legge di conservazione del momento angolare per una particella in moto in un campo centrale si chiama talvolta *integrale delle aree*.

invece, in modo implicito, la distanza r dal centro del punto in moto come funzione del tempo. Notiamo che l'angolo φ varia sempre col tempo in modo monotono: risulta chiaramente dalla (14,2) che $\dot{\varphi}$ non cambia mai di segno.

L'espressione (14,4) mostra che la parte radiale del moto si può considerare come un moto lineare in un campo con energia potenziale « efficace »

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (14,8)$$

La grandezza $M^2/2mr^2$ è detta energia centrifuga. I valori di r per i quali

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \quad (14,9)$$

determinano i confini della regione del moto per quanto riguarda la distanza dal centro. Se l'uguaglianza (14,9) è soddisfatta la velocità radiale r si annulla. Ciò non significa che la particella si fermi (come avviene in un vero moto unidimensionale), poiché la velocità angolare $\dot{\varphi}$ non si annulla. L'uguaglianza $\dot{r} = 0$ significa un « punto di svolta » della traiettoria in cui la funzione $r(t)$ da crescente diventa decrescente o viceversa.

Se la regione della variazione di r è limitata dalla sola condizione $r \geq r_{\min}$, il moto della particella è infinito: la sua traiettoria proviene dall'infinito e torna all'infinito.

Se la regione della variazione di r ha invece due limiti, $r_{\min}$ e $r_{\max}$, il moto è finito e la traiettoria giace interamente in una corona limitata dalle circonferenze $r = r_{\max}$ e $r = r_{\min}$. Ciò non significa, però, che la traiettoria sia necessariamente una curva chiusa. Nell'intervallo di tempo in cui r varia da $r_{\max}$ a $r_{\min}$ e di nuovo a $r_{\max}$, il raggio vettore ruota di un angolo $\Delta\varphi$ che, conformemente alla (14,7), è

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (14,10)$$

Perché la traiettoria sia chiusa è necessario che questo angolo sia una frazione razionale di 2π , sia cioè uguale a $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, dove m ed n sono numeri interi. Allora, dopo n ripetizioni di questo periodo di tempo, il raggio vettore del punto, dopo aver fatto m giri completi, riprenderà il suo valore iniziale, cioè la traiettoria si chiude.

Casi di questo genere sono tuttavia eccezionali, e per una forma $U(r)$ arbitraria l'angolo $\Delta\varphi$ non è una frazione razionale di 2π . Per questo la traiettoria di un moto finito generalmente non è chiusa. Essa passa infinite volte alla distanza minima e a quella massima

dal centro (come, per esempio, nella fig. 9), e, in un tempo infinito, ricopre tutta la corona compresa tra le due circonferenze limite.

Esistono soltanto due tipi di campo centrale in cui tutte le traiettorie dei moti finiti sono chiuse. Sono i campi in cui l'energia potenziale della particella è proporzionale a $1/r$ o a r^2 . Il primo di questi casi verrà esaminato nel prossimo paragrafo, e il secondo corrisponde al cosiddetto oscillatore spaziale (vedi problema 3 del § 23).

In un punto di svolta, la radice quadrata della (14,5) (così come le espressioni integrande nella (14,6) e nella (14,7)) cambia di segno. Se

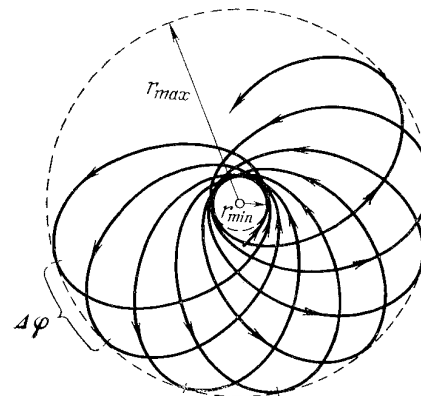


Fig. 9

si misura l'angolo φ a partire dalla direzione di un raggio vettore terminante in un punto di svolta, le porzioni della traiettoria facenti capo, da parti opposte, a questo punto differiranno, per valori di r uguali, solo per il segno di φ ; questo significa che la traiettoria è simmetrica rispetto alla direzione indicata. Partendo, per esempio, da uno dei punti $r = r_{\max}$, si percorre la porzione di traiettoria fino al punto $r = r_{\min}$, poi si ha una porzione disposta simmetricamente fino al successivo punto $r = r_{\max}$ e via di seguito; in altre parole, l'intera traiettoria si ottiene ripetendo in andata e in ritorno porzioni uguali. Ciò avviene anche per le traiettorie infinite le quali sono formate da due rami simmetrici che si estendono dal punto di svolta $r_{\min}$ fino all'infinito.

L'esistenza di un'energia centrifuga (per un moto in cui $M \neq 0$), tendente all'infinito come $1/r^2$ quando $r \rightarrow 0$, rende generalmente impossibile la penetrazione delle particelle nel centro del campo, anche se questo è di per sé stesso un centro d'attrazione. La « caduta » di una particella nel centro è possibile soltanto nel caso in cui l'energia potenziale tende con sufficiente rapidità verso $-\infty$ per $r \rightarrow 0$.

Donde

$$t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{E + m_2 g l \cos \varphi}} d\varphi.$$

Esprimendo mediante la (2) le coordinate $x_2 = x + l \sin \varphi$ ed $y_2 = l \cos \varphi$ della particella m_2 in funzione di φ , troviamo che la traiettoria di questa particella rappresenta un arco d'ellisse con semiasse orizzontale uguale a $l m_1 / (m_1 + m_2)$ e semiasse verticale uguale a l . Quando $m_1 \rightarrow \infty$, si ritrova l'usuale pendolo matematico oscillante secondo un arco di circonferenza.

§ 15. Il problema di Keplero

L'esempio più importante di campi centrali è quello di un campo in cui l'energia potenziale è inversamente proporzionale ad r e, rispettivamente, le forze sono inversamente proporzionali a r^2 . È il

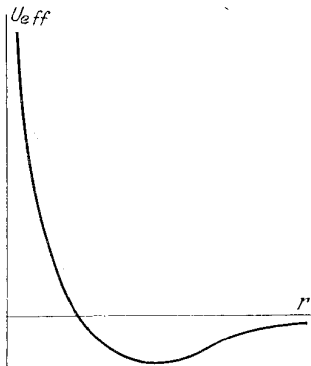


Fig. 10

caso dei campi newtoniani di gravità e dei campi coulombiani elettrostatici. I primi, come è noto, hanno carattere attrattivo, e secondi possono essere sia attrattivi che repulsivi.

Consideriamo anzitutto un campo d'attrazione in cui

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (15,1)$$

dove la costante α è positiva. Il grafico dell'energia potenziale « efficace »

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (15,2)$$

è della forma indicata nella fig. 10. Per $r \rightarrow 0$, essa tende verso $+\infty$, e per $r \rightarrow \infty$ tende a zero per valori negativi; per $r = M^2/\alpha m$ essa

ha un minimo uguale a

$$(U_{\text{eff}})_{\text{min}} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \quad (15,3)$$

Risulta direttamente da questo grafico che per $E > 0$ il moto della particella sarà infinito, e finito per $E < 0$.

La forma della traiettoria è determinata dalla formula generale (14,7). Riportando in essa $U = -\frac{\alpha}{r}$ ed eseguendo un'integrazione elementare, si ottiene:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dell'angolo φ in modo tale che la costante sia nulla e introducendo le notazioni

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (15,4)$$

possiamo scrivere la formula della traiettoria come segue:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi. \quad (15,5)$$

Questa è l'equazione di una sezione conica avente per fuoco l'origine delle coordinate; p ed e sono detti rispettivamente *parametro* e *eccentricità* dell'orbita. Come si vede dalla (15,5), la scelta dell'origine di φ è tale che il punto in cui $\varphi = 0$ è il più vicino al centro (questo punto è detto *perielio* dell'orbita).

Nel problema equivalente dei due corpi interagenti secondo la legge (15,1), l'orbita di ciascuna delle particelle rappresenta una sezione conica avente per fuoco il centro di massa comune.

Dalla (15,4) si vede che per $E < 0$ l'eccentricità è minore di 1, cioè l'orbita è un'ellisse (fig. 11) e il moto è finito conformemente a quanto detto all'inizio di questo paragrafo. Secondo note formule della geometria analitica, il semiasse maggiore a e il semiasse minore b sono dati da

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (15,6)$$

Il valore minimo ammissibile dell'energia coincide con la (15,3), e in questo caso si ha $e = 0$, cioè l'ellisse si trasforma in un cerchio. Notiamo che il semiasse maggiore dell'ellisse dipende soltanto dall'energia (e non dal momento angolare) della particella. Le distanze minima e massima dal centro del campo (fuoco dell'ellisse) sono

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+e} = a(1-e), \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-e} = a(1+e). \quad (15,7)$$

Queste espressioni (con a ed e sostituite mediante la (15,6) e la (15,4)) si potrebbero evidentemente ottenere direttamente come radici dell'equazione $U_{\text{eff}}(r) = E$.

È comodo determinare il tempo di rivoluzione sull'orbita ellittica, cioè il periodo del moto T , per mezzo della legge di conservazione

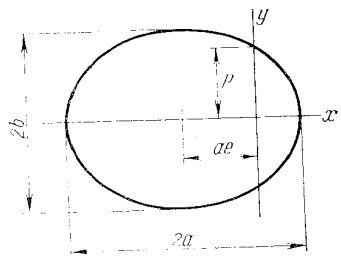


Fig. 11

del momento angolare nella forma dell'« integrale delle aree » (14,3). Integrando questa uguaglianza rispetto al tempo da zero a T , si ottiene:

$$2mf = TM,$$

dove f è l'area racchiusa dall'orbita. Per l'ellisse $f = \pi ab$, e mediante le formule (15,6) si ottiene:

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (15,8)$$

Il fatto che il quadrato del periodo dovesse essere proporzionale al cubo delle dimensioni lineari dell'orbita era già stato mostrato nel § 10. Notiamo ancora che il periodo dipende solo dall'energia della particella.

Per $E \geq 0$ il moto è infinito. Se $E > 0$, l'eccentricità $e > 1$, cioè la traiettoria è un'iperbole che contorna il centro del campo (fuoco), come è indicato nella fig. 12. La distanza del perielio dal centro è

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e-1), \quad (15,9)$$

dove

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

è il « semiasse » dell'iperbole.

Se invece $E = 0$, l'eccentricità $e = 1$, la particella percorre una parabola con distanza di perielio $r_{\min} = p/2$. Questo caso si ha allorché la particella comincia il suo moto da uno stato di quiete all'infinito.

La relazione tra le coordinate di una particella in moto su un'orbita e il tempo può essere trovata con l'aiuto della formula generale

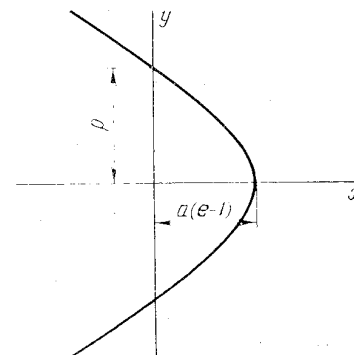


Fig. 12

(14,6). Per essa esiste una forma parametrica più comoda a cui si può giungere nel modo seguente.

Consideriamo anzitutto orbite ellittiche. Sostituendo a ed e secondo la (15,4) e la (15,6), scriviamo l'integrale (14,6), che determina il tempo, nella forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}.$$

Eseguendo la sostituzione

$$r - a = -ae \cos \xi,$$

questo integrale assume la forma

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) + \text{costante}.$$

Scegliendo l'origine dei tempi in modo tale da annullare la costante, si ottiene infine la seguente rappresentazione parametrica della relazione tra r e t :

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e \sin \xi) \quad (15,10)$$

(nell'istante $t = 0$ la particella si trova nel suo perielio). Mediante lo stesso parametro ξ si possono esprimere anche le coordinate cartesiane della particella $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (gli assi x ed y sono diretti rispettivamente lungo i semiasse maggiore e minore dell'ellisse).

se). Dalle (15,5) e (15,10) otteniamo

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e \cos \xi) = ae(\cos \xi - e),$$

e troviamo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Infine abbiamo:

$$x = a(\cos \xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi. \quad (15,11)$$

Ad una rivoluzione completa sull'ellisse corrisponde una variazione del parametro ξ da 0 a 2π .

Calcoli del tutto analoghi ci portano ai seguenti risultati per le traiettorie iperboliche:

$$r = a(e \operatorname{ch} \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (e \operatorname{sh} \xi - \xi), \quad (15,12)$$

$$x = a(e - \operatorname{ch} \xi), \quad y = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} \xi,$$

dove il parametro ξ assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.

Consideriamo ora il moto in un campo di repulsione dove

$$U = \frac{\alpha}{r} \quad (15,13)$$

($\alpha > 0$). In questo caso l'energia potenziale efficace

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

decresce in modo monotono da $+\infty$ a zero, quando r varia da zero ad ∞ . L'energia della particella non può essere che positiva, ed il

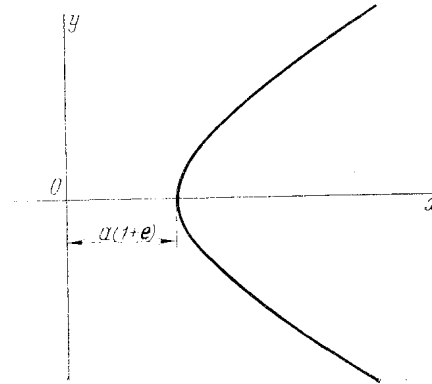


Fig. 13

moto è sempre infinito. Tutti i calcoli per questo caso sono precisamente analoghi a quelli eseguiti sopra. La traiettoria è un'iperbole

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \varphi \quad (15,14)$$

[p ed e sono determinate dalle formule (15,4)]. Essa passa vicino al centro del campo, come è indicato nella fig. 13. La distanza del peri-