

Appunti per le esercitazioni di Fisica 1 per Matematici

Prof. M.Bassan

1 Requisiti di matematica e aritmetica

Per affrontare gli esercizi proposti (ma anche le lezioni del corso) supponiamo note:

- Derivate: la velocità con cui cambia il valore di una funzione, la pendenza di una curva, coefficiente angolare della retta tangente...
- Integrali: Area sotto una curva, limite di una somma, accumulo di infiniti contributi infinitesimi...
- Regole di derivazione ed integrazione di funzioni di una variabile; uso delle derivate per trovare i massimi (o minimi) di una funzione.
- Funzioni "speciali" o "elementari" (dipende dai punti di vista) : trigonometriche (con le relazioni), iperboliche, logaritmo, esponenziale. Mettetevi alla prova: quanto vale il logaritmo di 1 ? di 0 ? di ∞ ? e quanto vale $\cos(3\pi/4)$? $\exp(\pm 1)$? $\exp(0)$? Sapete tracciare senza esitare il grafico di $\ln(x)$? e di $\exp(-x)$?
- E' utile, ma non necessaria, una conoscenza delle equazioni differenziali: le affronteremo insieme. Ricordiamo qui che la soluzione più generale e' data dalla soluzione generale dell'omogenea associata (che rappresenta il comportamento transitorio, l'andamento della soluzione vicino al tempo iniziale) + una soluzione particolare della eq. non omogenea (che descrive il comportamento asintotico, per $t \rightarrow \infty$).

2 Notazione esponenziale e prefissi

Spero vi sia noto che un numero comunque grande o piccolo può essere espresso come un numero compreso tra 0 e 1 (mantissa) per una potenza di dieci (esponente). Il numero di decimali dipende dalla precisione richiesta.....o disponibile.

Esempio: quanti secondi ci sono in un anno ? $3600 \cdot 24 \cdot 365$ (circa) $= 31\,536\,000$ secondi $= 3.15 \cdot 10^7 s$.
Con buona approssimazione (quale errore percentuale ?) vale la regola mnemonica $\simeq \pi \cdot 10^7 s$.

Esempio: Quale è la frequenza di rotazione della Terra ? ovviamente il periodo e' un giorno (solare medio, per i pignoli) $= 86400$ s. La frequenza e' il suo inverso $f = 1/T = 0.000011574 s^{-1}$, che è un numero chiaramente scomodo. Lo scriveremo come $f = 1.16 \cdot 10^{-5} Hz$.

In alternativa, é uso diffuso utilizzare dei prefissi, davanti all'unitá di misura, per indicare delle potenze di 10, o piu' precisamente, di 10^3 . E' noto a tutti che kilometro (km) significa 1000 metri (m) e milligrammo (mg) indica 1/1000 di grammo (g). Ecco una tabella di prefissi:

Table 1: prefissi e potenze di 10

prefisso	nome	valore			
peta	P	10^{15}	milli	m	10^{-3}
Tera	T	10^{12}	micro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
Mega	M	10^6	pico	p	10^{-12}
kilo	k	10^3	femto	f	10^{-15}
		$10^0 = 1$	atto	na	10^{-12}

Sebbene non sia di uso corrente, é perfettamente lecito dire che in un anno ci sono 31.5 Ms, o che la frequenza di rotazione terrestre sia di $11.6\mu Hz$.

La distanza media Terra-Sole vale 1 Unitá Astronomica $\simeq 150$ milioni di kilometri (per la precisione, 149.6) : sarebbe piú corretto dire $1UA = 1.5 \cdot 10^{11}$ m oppure $1UA = 150$ Gm.

3 Uso di approssimazioni "lecite"

- E' di grande utilità quando sia complicato avere soluzioni esatte, lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione: Se non conosco il valore di una funzione f in x , ma la conosco in un punto vicino $x_0 = x - \Delta x$, e conosco la derivata $f'(x)$, posso approssimare: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \dots$

Esempio: Quanto vale $f(x) = \sin(1^\circ)$? non lo so calcolare, ma conosco $\sin(0)$ e la derivata $f' = \cos(x)$. Quindi:

$$\sin(1^\circ) = \sin(0^\circ) + 1^\circ * \cos(0^\circ) = 0 + \pi/180 * 1 = 1.74 \cdot 10^{-2} \pi/180^\circ \sim 1.75 \cdot 10^{-2}$$

che differisce dal valore esatto per poche parti in 10^6 . Per la stima numerica di $\pi/180$ vedi alla fine del paragrafo.

- Il significato di "piccolo" (o "grande"): diciamo che una grandezza è piccola se è molto minore di un'altra grandezza che entra nel problema. Occorre costruire una grandezza adimensionale che risulti $<< 1$.

Esempio un metro é piccolo rispetto al diametro terrestre ($1m/R_\oplus \sim 10^{-7}$), ma è grande se confrontato con le dimensioni molecolari ($1m/D_{H_2O} \sim 10^{10}$).

Nel caso sopracitato dello sviluppo in serie di Taylor, un punto "vicino", o con distanza Δx "piccola" significa che la funzione "vera" si discosta poco dall'approssimazione lineare, cioè che il contributo della derivata seconda é trascurabile: $\Delta x << |f'(x_0)/f''(x_0)|$

- Grazie allo sviluppo di Taylor ed all'accezione di "piccolo", possiamo approssimare alcune

funzioni per valori "piccoli" dell'argomento (x positiva o negativa, purchè $|x| < 1$) :

$$\sin(x) \sim x - x^3/6 \quad \text{il primo termine è di norma sufficiente} \quad (1)$$

$$\cos(x) \sim 1 - x^2/2 \quad \cos(0) \text{ è un massimo, occorre sviluppare al II ordine} \quad (2)$$

$$e^x \sim x \quad (3)$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{e, particolarmente utile:} \quad (4)$$

$$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5)$$

In particolare: $1/(1+x) \simeq (1-x)$; $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$

Esempio: $(85)^{3/2} = [9^2(1 + 4/81)]^{3/2} \simeq 9^3 \cdot (1 + 3/2 \cdot 4/81) \simeq 9^3 \cdot (29/27) = 29 \cdot 27 = 783$.
Il valore "esatto" è 783,66 : non male, vero ?

- Valori numerici di una soluzione. Una volta giunti a fornire la risposta al quesito del problema in forma algebrica chiusa, il passo successivo consiste nel sostituire i valori numerici e valutare il risultato. Nove volte su dieci non vi servirà la calcolatrice (e pertanto non potrete passarvela durante l'esame), tranne che per valutare funzioni trascendenti. I passi da effettuare sono i seguenti:

- Verificare che la soluzione (algebrica) sia dimensionalmente corretta.
- introdurre tutti i valori numerici separando esponente e mantissa
- Sommare gli esponenti (il che ci dà l'ordine di grandezza della soluzione) e moltiplicare le mantisse: se ci accontentiamo di una soluzione esatta entro il 10%, basta arrotondare ogni valore a 1 cifra significativa. Il resto è tabelline !

Esempio : quanto vale $1/3600$?

$$\frac{1}{3600} = \frac{1}{3.6 \cdot 10^3} = \frac{10^{-3}}{3.6} \sim 0.3 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-4}$$

Vogliamo fare meglio ? usiamo l'approssimazione (6) :

$$\frac{1}{3600} = \frac{10^{-3}}{3.6} = \frac{10^{-3}}{3.3 \cdot (1 + 0.3/3.6)} \simeq \frac{0.3 \cdot 10^{-3}}{(1 + 1/12)} = 0.3 \cdot 10^{-3} (1 - 0.08) = 3 \cdot 0.92 \cdot 10^{-4} = 2.76 \cdot 10^{-4}$$

Il tutto ottenuto (davvero !) senza usare strumenti di calcolo, e neanche carta e penna: confrontate con il risultato esatto: $2.778 \cdot 10^{-4}$.

Esempio Quanto vale un radiante ? Occorre calcolare:

$$180/\pi \simeq \frac{180}{3(1 + 0.14/3)} \simeq 60/(1 + 0.05) = 60 \cdot 0.95 = 0.57 \quad (6)$$

Il risultato esatto (approssimato a 3 cifre decimali) è 57.296: abbiamo fatto un errore minore del 5%.

Esempio: Calcolare la velocità di rivoluzione della Terra intorno al Sole: sia che consideriamo che copre un cammino pari a $2\pi R$ in un anno, sia che applichiamo $v = \omega R$, con $\omega = 2\pi/1$ anno, otteniamo:

$$v = \omega R (m/s) = 2\pi/1 \text{ anno} \cdot 1UA = \frac{2\pi 1.5 \cdot 10^{11} m}{\pi \cdot 10^7 s} = 3 \cdot 10^4 m/s = 30 km/s$$

- Negli esempi precedenti abbiamo, per due volte, calcolato "a mente" l'inverso di un numero ($1/3.3 \approx 0.3$, $1/12 \sim 0.08$). La seguente tabellina (ovviamente approssimata !) puo' essere utile:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1/n	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.17	0.14	0.125	0.11	0.1	0.09	0.08	0.077

Table 2: inversi (approssimati) dei numeri interi tra 1 e 13