

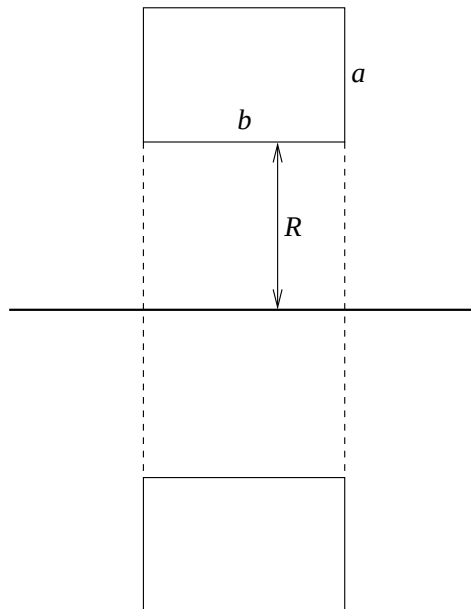


Anno Accademico 2009-2010
Corso di Laurea in Fisica e F.A.M.
Esame di Fisica 2 (parte 2^a, EM2)
Prof P. Chiaradia
6 Settembre 2010

Problema

Su un solenoide toroidale a sezione rettangolare ($a = 4$ cm, $b = 6$ cm) di raggio interno $R = 5$ cm sono avvolte $N = 500$ spire. Lungo l'asse di simmetria del solenoide è disposto un filo rettilineo (vedi figura), percorso da una corrente variabile secondo la legge $i(t) = i_0 \cos \omega t$ con $i_0 = 50$ A e $\omega = 2.5 \cdot 10^3$ rad/s. Calcolare:

- 1) il coefficiente di mutua induzione del sistema;
- 2) la corrente indotta i' nel solenoide, assumendo trascurabile la resistenza dell'avvolgimento.
- 3) Si calcoli infine il nuovo valore del coefficiente di mutua induzione se il filo viene piegato in modo da formare una spira circolare concatenata con il solenoide.



Soluzione

1) Per calcolare il coefficiente di mutua induzione, calcoliamo il flusso del campo prodotto dal filo, concatenato con il solenoide. Le linee del campo prodotto dal filo rettilineo indefinito sono delle circonferenze che giacciono su piani perpendicolari al filo e con centro nel filo stesso. Il modulo del campo è dato dalla legge di Biot-Savart per cui:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

dove r indica la distanza dal filo.

Per avere il flusso integriamo sulla superficie rappresentata dalla sezione del solenoide toroidale. Sia x la coordinata lungo il filo (lato lungo della sezione rettangolare) e r la coordinata radiale.

$$\Phi = \int B(r) dS = \int_0^b dx \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \log(1 + a/R)$$

Questo è il flusso concatenato con una singola spira del solenoide. Il flusso concatenato con tutto il solenoide sarà:

$$\Phi = \frac{\mu_0 N i b}{2\pi} \log(1 + a/R)$$

Il coefficiente di mutua induzione si ottiene allora dalla relazione

$$\Phi(B) = M i \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \log(1 + a/R) = 3.53 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

dove abbiamo indicato con i la corrente che scorre nel filo indefinito e B rappresenta il campo generato da quest'ultima.

2) Il flusso concatenato con il solenoide, prodotto dalla corrente nel filo, varia nel tempo e dunque abbiamo una f.e.m. indotta

$$\Phi = M i = M i_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega M i_0 \sin \omega t$$

sfasata di $\pi/2$ rispetto alla corrente nel filo. Se R_0 è la resistenza del solenoide e i' la corrente indotta in esso, l'equazione che possiamo scrivere è $\mathcal{E} - L di'/dt = R_0 i'$; se però la resistenza R_0 è trascurabile l'equazione diventa:

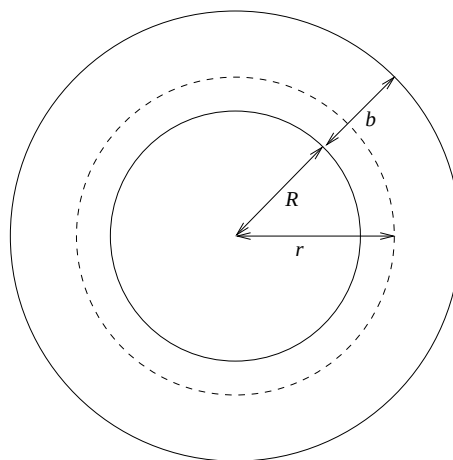
$$\frac{di'}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\omega M i_0}{L} \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad i'(t) = -\frac{M i_0}{L} \cos \omega t = \frac{M}{L} i(t)$$

Per calcolare il coefficiente di autoinduzione L del solenoide, dobbiamo calcolare quanto vale il campo magnetico B prodotto dalla corrente che scorre nell'avvolgimento i' . Appliciamo il teorema della circuitazione ad una circonferenza interna al solenoide di raggio r , come indicato in figura. Avremo allora:

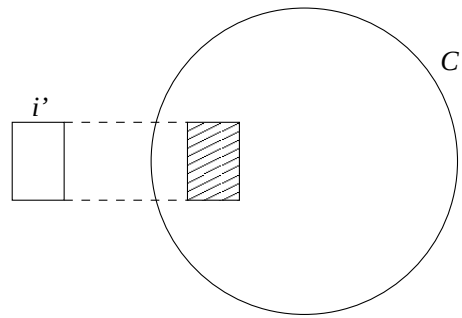
$$\oint B \cdot dl = 2\pi r B = \mu_0 N i' \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 N i'}{2\pi r} \quad (1)$$

Si ottiene dunque lo stesso risultato del campo prodotto dalla corrente nel filo rettilineo indefinito con la sola differenza che ora abbiamo un fattore N a moltiplicare. Dunque, senza ricalcolare l'integrale, possiamo porre:

$$L = N M \quad \Rightarrow \quad i'(t) = -\frac{i_0}{N} \cos \omega t = -0.1 \cos \omega t \text{ A}$$



3) Se al posto del filo rettilineo indefinito abbiamo una spira circolare, dobbiamo calcolare il coefficiente di mutua induzione considerando il flusso del campo magnetico prodotto dal solenoide e concatenato con la spira (non sappiamo ora calcolare il campo prodotto dalla spira in un punto generico). Il campo prodotto dal solenoide è quello dell'equazione (1) e il flusso di quest'ultimo sulla superficie della spira circolare si riduce al flusso sulla sola sezione del toro, essendo nullo il campo fuori dal solenoide.



$$\Phi_C(B') = \frac{\mu_0 N i' b}{2\pi} \log(1 + a/R) \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\Phi_C(B')}{i'} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \log(1 + a/R)$$

Dunque viene esattamente come quello calcolato per il filo rettilineo indefinito. Tale risultato riflette il fatto che il campo del solenoide è diverso da zero solo all'interno e nullo fuori.