



Anno Accademico 2009-2010
Corso di Laurea in Fisica e F.A.M.
Esame di Fisica 2 (Prof P. Chiaradia)
8 Febbraio 2010

Problema 1

Si consideri il circuito di figura 1 in cui $C_1 = 200 \mu\text{F}$, $C_2 = 100 \mu\text{F}$, $R = 100 \Omega$ e $V_0 = 100 \text{ V}$. I condensatori sono inizialmente scarichi e l'interruttore S aperto.

Se ad un certo istante si chiude l'interruttore, calcolare:

- 1) La differenza di potenziale e la carica ai capi dei condensatori "immediatamente" dopo la chiusura dell'interruttore e all'equilibrio* ($t \rightarrow \infty$)¹;
- 2) La quantità di carica che è passata attraverso la resistenza R , una volta raggiunto l'equilibrio;
- 3) La corrente che fluisce nell'interruttore S , $i_s(t)$, in funzione del tempo, a partire da un'istante "immediatamente" successivo alla chiusura dell'interruttore;
- 4) La d.d.p. ai capi del condensatore C_1 anch'essa in funzione del tempo, $\Delta V_1(t)$.

Problema 2

Un disco omogeneo di materiale dielettrico ha raggio $R = 20 \text{ cm}$ e massa $M = 0.12 \text{ kg}$ e può ruotare senza attrito intorno al suo asse centrale orientato verticalmente. Sul disco viene distribuita in modo uniforme la carica $Q = 2 \times 10^{-5} \text{ C}$. Ad un certo istante viene acceso un campo magnetico la cui direzione è parallela all'asse di rotazione del disco ed il cui modulo segue la legge temporale:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{B_0}{\tau} t & t \leq \tau \\ B_0 & t > \tau \end{cases}$$

con $B_0 = 4 \text{ T}$.

Trascurando gli effetti di autoinduzione, si calcoli²:

- 1) La velocità angolare acquisita dal disco al tempo τ

Per tempi successivi alla fase transiente ($t > \tau$), si calcoli:

- 2) La corrente che circola intorno all'asse del disco;
- 3) Il momento magnetico equivalente;
- 4) Il campo magnetico prodotto dal disco lungo il suo asse, nelle immediate vicinanze del disco stesso (commentare il risultato confrontando con il campo esterno B_0).

Per rispondere agli ultimi due quesiti si assuma lo spessore del disco trascurabile.

¹Si consideri che per un segnale transiente ($\theta(t)$), al quale può essere assimilata la chiusura di un interruttore, le capacità hanno resistenza (impedenza) essenzialmente nulla oppure, in maniera equivalente, la resistenza può essere considerata un circuito aperto.

²Si consideri il disco come l'unione di infiniti anelli di spessore radiale dr e si ragioni sugli anelli.

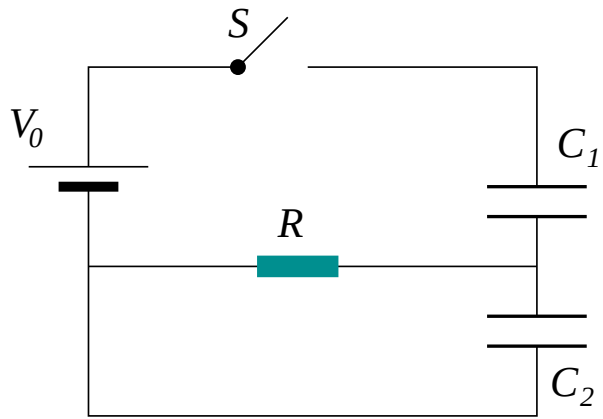


Figura 1 Problema 1

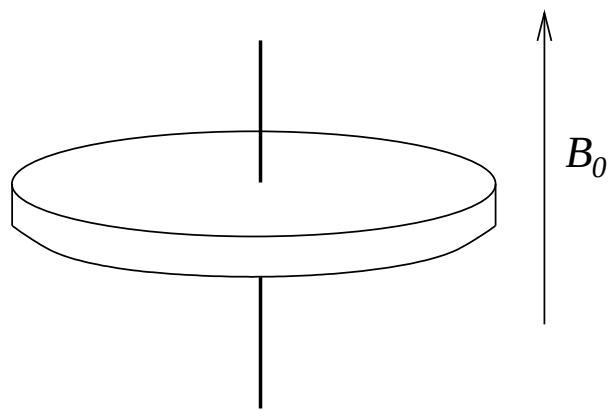


Figura 2 Problema 2

Soluzione

Problema 1

Nell'istante appena successivo alla chiusura dell'interruttore, la resistenza equivale ad un ramo aperto ed abbiamo una singola maglia con la serie di due condensatori. La capacità equivalente vale:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 66.7 \mu\text{F}$$

La stessa carica $Q_0 = V_0 \cdot C_{eq} = 6.67 \text{ mC}$ si deposita (immediatamente, perchè non c'è resistenza in serie) sui due condensatori e le differenze di potenziale ai capi dei condensatori valgono:

$$\Delta V_1 = \frac{Q_0}{C_1} = 33.3 \text{ V} \quad \Delta V_2 = \frac{Q_0}{C_2} = 66.7 \text{ V}$$

All'equilibrio, viceversa, quando tutto è costante, il condensatore equivale ad un circuito aperto mentre la resistenza ad un corto circuito. In queste condizioni il circuito equivalente diventa una singola maglia con il generatore chiuso sul singolo condensatore C_1 e il condensatore C_2 si è scaricato completamente sulla resistenza R . Avremo allora:

$$Q_1 = V_0 C_1 = 20 \text{ mC} \quad \Delta V'_1 = V_0 = 100 \text{ V} \quad \Delta V'_2 = 0 \text{ V}$$

Per trovare la carica che passa attraverso la resistenza R , consideriamo che il nodo tra i due condensatori e la resistenza immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore è scarico mentre all'equilibrio possiede la carica $-Q_1$. Dunque la carica che fluisce vale proprio $Q_1 = 20 \text{ mC}$ e va da destra verso sinistra.

Per rispondere alle domande 3) e 4) dobbiamo necessariamente risolvere il circuito e per far ciò scriviamo le equazioni delle due maglie indicate nella figura (la scelta delle maglie è ovviamente arbitraria).

$$V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + (i_1 - i_2)R \quad \frac{Q_2}{C_2} = (i_1 - i_2)R \quad (1)$$

avendo indicato con i_1 e i_2 le correnti rispettivamente della maglia con C_1 e con C_2 , entrambe che fluiscono in senso orario (vedi figura).

Dalle due equazioni consegue anche

$$V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

da cui derivando otteniamo la relazione tra le due correnti

$$\frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} = 0$$

Derivando la seconda equazione delle 1) e esprimendo i_1 in funzione di i_2 , dopo semplici passaggi, troviamo l'equazione differenziale cercata

$$(C_1 + C_2)R \frac{di_2}{dt} + i_2 = 0$$

e dunque la corrente risulterà

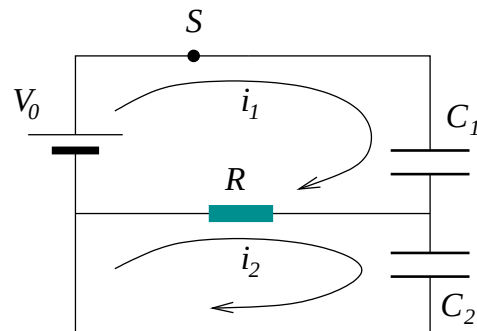
$$i_2(t) = i_2(0)e^{-t/\tau} \quad \tau = (C_1 + C_2)R = 30 \text{ ms}$$

La condizione iniziale ci è fornita dalle condizioni iniziali e finali sulle cariche, in particolare la carica sul condensatore C_1 . L'evoluzione della carica su C_1 nel tempo si ottiene integrando la corrente $i_1(t)$

$$Q_1(t) = Q_1(0) + \int_0^t i_1(t')dt' = Q_1(0) + \tau i_1(0)(1 - e^{-t/\tau})$$

E imponendo la condizione che all'equilibrio la carica Q_1 sia $C_1 V_0$, otteniamo

$$Q_1(t \rightarrow \infty) = Q_1(0) + \tau i_1(0) = C_1 V_0 \quad \Rightarrow \quad i_1(0) = \frac{V_0 C_1 - V_0 C_{eq}}{\tau} = \frac{V_0 C_1^2}{R(C_1 + C_2)} = 0.222 \text{ A}$$



Per la corrente i_2 otteniamo

$$i_2(0) = -\frac{C_2}{C_1} i_1(0) = -\frac{v_0 C_1 C_2}{R(C_1 + C_2)} = -0.111 \text{ A}$$

e risulta negativa in quanto scorre in senso antiorario.

Si può a questo punto verificare che la carica che passa attraverso la resistenza R risulta proprio

$$Q_R = \int_0^\infty [i_1(t') - i_2(t')] dt' = [i_1(0) - i_2(0)] \tau = V_0 C_1$$

La d.d.p. ai capi di C_1 si ottiene dividendo la carica Q_1 per la capacità C_1 e si trova

$$\Delta V_1(t) = V_0 - (V_0 - \Delta V_1) e^{-t/\tau}$$

Problema 2

Nel momento in cui il campo magnetico B varia nel tempo ($0 < t < \tau$), c'è una variazione di flusso concatenato con il disco e, come conseguenza della legge di Faraday-Neumann, si genera su di esso una forza elettromotrice e dunque un campo elettrico. Tale campo agirà sulle cariche del disco (fisse), mettendo quest'ultimo in movimento. Per calcolare il campo e quindi il movimento, evidentemente rotatorio, del disco, converrà suddividere quest'ultimo in tanti anelli di laghezza dr . Facciamo tutte le considerazioni sul generico anello di raggio r e poi il risultato finale per il disco si otterrà integrando su tutti i possibili anelli, cioè integrando su r da 0 a R .

$$\Phi(B) = BS_r = \frac{B_0 t}{\tau} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{\pi B_0 r^2}{\tau}$$

essendo S_r e f_r rispettivamente l'area e la forza elettromotrice sul generico anello di raggio r .

Il campo elettrico (uniforme lungo l'anello) sarà allora

$$E_r = \frac{f_r}{2\pi r} = \frac{B_0}{2\tau} r$$

e dunque la forza che agisce sull'anello e lo fa ruotare intorno all'asse del disco vale:

$$dF = E_r dq = \frac{B_0}{2\tau} r \frac{2\pi r dr Q}{\pi R^2} = \frac{B_0 Q r^2}{\tau R^2} dr$$

dove dq è la carica del generico anello. Questa forza produce il momento $dK_r = r dF$ e il momento totale che agisce sul disco vale

$$K = \int_0^R r dF = \int_0^R \frac{B_0 Q}{\tau R^2} r^3 dr = \frac{B_0 Q R^2}{4\tau}$$

Dalla seconda equazione cardinale della meccanica abbiamo poi

$$\frac{1}{2} MR^2 \dot{\omega} = K = \frac{B_0 Q R^2}{4\tau} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{B_0 Q}{\tau M} \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{\omega} \tau = \frac{B_0 Q}{2M} = 3.33 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

La corrente associata al disco carico rotante è evidentemente la carica totale diviso il periodo di rotazione

$$i = \frac{Q}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi} = 1.06 \text{ nA}$$

Il momento magnetico del disco si ottiene nuovamente suddividendo il disco in anelli infinitesimi e poi integrando. La corrente del disco infinitesimo vale

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr$$

e dunque

$$d\mu = \pi r^2 di = \frac{\omega Q r^3 dr}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \int_0^R d\mu = \frac{1}{4} Q R^2 \omega = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ A}$$

Allo stesso modo otteniamo il campo prodotto dal disco nelle immediate vicinanze del centro del disco. Partiamo dal campo prodotto da un anello al centro di quest'ultimo.

$$dB = \frac{\mu_0}{2r} di = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} dr \quad \Rightarrow \quad B = \int_0^R dB = \int_0^R \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R} = 6.67 \cdot 10^{-15} \text{ T}$$

Otteniamo dunque un campo piccolissimo rispetto a quello esterno B_0 e questo ci conferma l'assoluta bontà dell'approssimazione di trascurare l'autoinduzione nei conti.