

Soluzione del Compito d'esame del 25 febbraio 2008

1) Nella prima regione $r \leq R_1$, se la corrente è esclusivamente superficiale (caso b), il campo è ovunque nullo. Se invece la corrente è uniformemente distribuita (caso a) l'applicazione del teorema di Ampere alla circonferenza ortogonale all'asse del filo conduttore si può scrivere come $B(r)2\pi r = \mu_0 i(r)$, dove $i(r)$ è connessa alla corrente $I = J_1 \pi R_1^2$ che circola nel filo, in particolare $i(r) = J_1 \pi r^2 = Ir^2/R_1^2$ e quindi:

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} = \frac{\mu_0 J r}{2} \quad \text{per } r \leq R_1 \quad (1)$$

Il campo è nullo sull'asse, poi cresce linearmente per raccordarsi, ad $r = R_1$ con il campo sull'intercapedine che vale:

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{per } R_1 \leq r \leq R_2. \quad (2)$$

Nella terza regione, cioè all'interno della calza, la corrente ha densità $J_3 = \frac{-I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$. L'applicazione del teorema di Ampere porta all'espressione:

$$B_3(r) = \frac{\mu_0(I - J_3\pi(r^2 - R_2^2))}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad \text{per } R_2 \leq r \leq R_3. \quad (3)$$

Infine nella quarta regione, $r > R_3$ il campo è nullo, $B_4(r) = 0$ poichè la corrente concatenata è uguale a zero.

2) la forze sul filo centrale è nulla per simmetria.

3) Possiamo suddividere la calza esterna in tanti elementi infinitesimi di larghezza $d\ell$ lunghezza unitaria e spessore $\Delta R = R_3 - R_2$, ognuno di questi elementi è percorso da una corrente infinitesima:

$$dI = \frac{Id\ell\Delta R}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} = \frac{Id\ell\Delta R}{\pi(R_3 - R_2)(R_3 + R_2)} = \frac{Id\ell}{2\pi(R_2 + R_3)/2} \quad (4)$$

Il campo magnetico che agisce su tale corrente dI è data dalla equazione (2), esso può essere calcolato approssimativamente in corrispondenza del raggio R_2 . La forza repulsiva, per unità di lunghezza, che agisce su tale elemento infinitesimo è data dall'espressione:

$$dF = dIB(R_2) = \frac{Id\ell}{2\pi(R_2 + R_3)/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} \simeq \mu_0 d\ell \left(\frac{I}{2\pi R_2} \right)^2 \quad (5)$$

è quindi la pressione risulta essere:

$$p = \frac{dF}{d\ell} = \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi R_2} \right)^2 = 4.4 \times 10^{-2} N/m^2 \quad (6)$$