



Anno Accademico 2009-2010
Corso di Laurea in Fisica e F.A.M.
Esame di Fisica 2 (Prof P. Chiaradia)
23 Febbraio 2010

Problema 1

Una sferetta di raggio trascurabile e carica q viene posta, attraverso una piccola apertura, al centro di una sfera metallica cava di raggio R e spessore trascurabile, scarica.

- 1) dare l'espressione del potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera cava.
- 2) Dire cosa cambia nel risultato trovato al punto precedente se la sferetta viene spostata dal centro della sfera cava e nel caso che essa tocchi la sua parete interna.

Si ripete l'operazione dall'inizio, cioè si pone la sferetta carica nel centro della sfera cava, ma questa volta con la sfera cava collegata a terra, e poi si toglie il collegamento a terra.

- 3) Dare la nuova espressione del potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera cava.
- 4) Se in queste nuove condizioni si preleva la sferetta dall'interno della sfera cava e la si porta a grande distanza da essa, che lavoro si deve compiere? Per il calcolo si assuma $q = 5 \text{ nC}$ e $R = 10 \text{ cm}$.

Successivamente si ripristina il collegamento a terra e si porta la sferetta a distanza $3R$ dal centro della sfera grande.

- 5) Calcolare il potenziale e il campo elettrico nel punto dove è posta la sferetta, sempre con il valori del punto (4);
- 6) calcolare l'energia elettrostatica del sistema in queste condizioni.

Problema 2

Un disco pesante ed omogeneo ($M = 2 \text{ kg}$ e $R = 20 \text{ cm}$) può ruotare su un piano verticale intorno al suo asse centrale. Il disco, costituito di materiale conduttore, è collegato ad un circuito nel modo indicato in figura 1; da un lato il circuito è collegato al bordo del disco con un contatto strisciante mentre l'altro lato del circuito è collegato al centro del disco. Tra i due contatti la resistenza (del disco) è non nulla ma trascurabile. Il tutto si chiude sull'induttanza $L = 3 \text{ mH}$ e perpendicolare al disco è presente un campo magnetico costante $B_0 = 1.2 \text{ T}$. Ad un certo istante si imprime al disco la velocità angolare $\omega_0 = 4.3 \text{ rad/s}$.

- 1) Spiegare perchè tra i punti A e B scorre corrente.
- 2) Calcolare il momento meccanico applicato sul disco, in funzione della corrente i .
- 3) Calcolare l'equazione oraria della corrente nel circuito e della velocità angolare del disco.
- 4) Discutere il bilancio energetico del sistema.
- 5) A quale elemento circuitale potremmo ricorrere (e di che valore) per realizzare un circuito equivalente senza il disco che ruota.

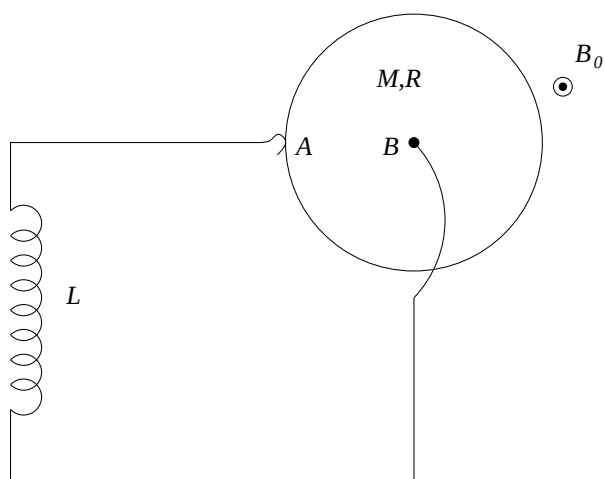


Figura 1 Circuito del problema 2

Soluzione

Problema 1

1) Applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio generico r otteniamo che $\Phi(E(r)) = 4\pi r^2 E(r) = q/\epsilon_0$, da cui ne deriva che $E(r) = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, e quindi:

$$V(r) = \int_r^\infty E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

siccome la sfera di raggio R ha spessore trascurabile ed è inizialmente scarica ne deriva che il sistema del tutto equivalente ad una carica puntiforme.

2) Nel caso in cui la sferetta si muova all'interno della sfera cava il potenziale e campo elettrico cambiano solo dentro la sfera cava ed il teorema di Gauss non è più utilizzabile perchè si perde la simmetria sferica. All'esterno tutto rimane invariato. Se la sferetta tocca la parete interna della sfera cava il campo all'interno si azzerà e il potenziale diventa costante, pari a quello della superficie conduttrice, mentre fuori continua a non cambiare nulla.

3) Nel caso in cui la sfera cava è inizialmente collegata a massa e quindi tenuta ad un potenziale pari a 0 ciò è possibile solo se su di essa è presente una carica elettrica pari a $-q$ uniformemente distribuita sulla sua superficie ($\sigma = -q/4\pi R$). Tale carica evidentemente rimane anche quando il collegamento a terra viene tolto. In questo caso sempre per mezzo del teorema di Gauss si può ricavare l'andamento del potenziale elettrico:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{per } r < R$$

mentre $V(r) = 0$ per $r \geq R$.

4) Dal momento in cui la sfera cava è scollegata da terra (e quindi non può variare la sua carica elettrica) il lavoro necessario per spostare la sferetta e portarla all'infinito sarà uguale alla sua carica per la differenza di potenziale tra i due punti in esame dalla sfera cava.

$$L = q\Delta V = q(V(\infty) - V(R)) = -qV(R) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 2.25 \mu\text{J}$$

5) Il caso in cui la sfera cava sia collegata a terra e la sferetta sia posta in un punto esterno ad essa si può risolvere con il metodo della carica immagine. Si deve cercare un sistema di due cariche q e q_1 che abbia la superficie di raggio R come superficie equipotenziale a $V = 0$. Prendiamo l'asse x con l'origine nel centro della sfera cava e passante per la carica q nel punto $x = 3R$, poniamo q_1 sull'asse x ad una distanza r_1 compresa tra 0 ed R e supponiamo inoltre $q_1 = -\alpha q$, ne consegue che il potenziale di un punto generico P sulla superficie della sfera cava è dato da:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{10R^2 - 6R^2 \cos \theta}} - \frac{-\alpha q}{\sqrt{r_1^2 + R^2 - 2Rr_1 \cos \theta}} \right] = 0$$

dove θ è l'angolo che individua il punto P rispetto all'asse x . Risolvendo questa equazione si trova $q_1 = -q/3$ e $r_1 = R/3$. Quindi:

$$V^{q_1}(3R) = -\frac{q}{32\pi\epsilon_0 R} = -56.2 \text{ V}$$

6) L'energia elettrostatica del sistema delle sue cariche è:

$$W = -\frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 R} = -2.81 \times 10^{-7} \text{ J}$$

Problema 2

1) Il disco in rotazione, essendo immerso in un campo magnetico normale, produce una forza elettromotrice indotta tra il centro e il bordo esterno e dunque una corrente. Per calcolare tale corrente, partiamo dalla forza elettromotrice indotta che si genera tra i punti A e B .

$$f_{AB} = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} dl = \int_0^R \omega r B_0 dr = \frac{\omega B_0 R^2}{2}$$

2) D'altra parte, se c'è una forza elettromotrice, e dunque una corrente che scorre, sul disco abbiamo anche una forza che tende a ruotare il disco stesso e dunque un momento rispetto al centro.

$$d\mathbf{F} = i \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad K = \int r \, dF = \int_0^R i B_0 r \, dr = \frac{i B_0 R^2}{2}$$

Possiamo poi considerare che la velocità angolare del disco è legata al momento dalla seconda equazione cardinale nel modo

$$I \dot{\omega} = K = \frac{i B_0 R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{i B_0}{M}$$

3) La differenza di potenziale tra i punti A e B deve essere uguale a quella ai capi dell'induttanza e dunque

$$f_{AB} = f_L = L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L \frac{di}{dt} = -\frac{\omega B_0 R^2}{2}$$

Se ora deriviamo questa equazione rispetto al tempo ed introduciamo il valore di $\dot{\omega}$ trovato sopra otteniamo l'equazione cercata

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{B_0^2 R^2}{2ML} i = 0$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico di pulsazione

$$\omega^* = \sqrt{\frac{B_0^2 R^2}{2ML}} = 2.19 \text{ rad/s}$$

L'equazione oraria della corrente sarà allora:

$$i(t) = i_M \sin(\omega^* t + \phi)$$

Da questa si ricava immediatamente l'equazione oraria della velocità angolare

$$\omega(t) = -\frac{2L}{B_0 R^2} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{2L}{B_0 R^2} i_0 \omega^* \cos(\omega^* t + \phi) = -\sqrt{\frac{2L}{MR^2}} i_M \cos(\omega^* t + \phi)$$

La condizione iniziale sulla corrente la possiamo ricavare dalla velocità angolare iniziale, di cui conosciamo il valore e che sappiamo essere la massima velocità angolare che il disco ha nel suo moto armonico, in quanto, una volta partito con velocità angolare ω_0 , la forza elettromotrice indotta genera una corrente cui è associata una forza di Lorentz che si oppone al moto. Dunque possiamo porre

$$\omega_0 = -\sqrt{\frac{2L}{MR^2}} i_M \quad \Rightarrow \quad i_M = -\omega_0 \sqrt{\frac{MR^2}{2L}} = -3.65 \text{ A} \quad \phi = 0$$

e le equazioni orarie sono:

$$i(t) = i_M \sin(\omega^* t) \quad \omega(t) = \omega_0 \cos(\omega^* t)$$

4) Per quanto riguarda il bilancio energetico, abbiamo l'energia cinetica del disco e l'energia magnetica immagazzinata nell'induttanza. Potendosi trascurare i meccanismi di dissipazione (attriti o resistenze) l'energia si conserva e passa dall'induttore al disco periodicamente. Si può scrivere:

$$E = \frac{1}{2} I \omega(t)^2 + \frac{1}{2} L i(t)^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega^* t) + \frac{1}{2} L i_M^2 \sin^2(\omega^* t) = \frac{1}{4} M R^2 \omega_0^2$$

Infine si può osservare che uno stesso circuito oscillante si ottiene mettendo in serie un'induttanza ed un condensatore (circuito LC). Per esso la pulsazione vale:

$$E = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

E uguagliando questa pulsazione con la pulsazione ottenuta con il circuito col disco si ottiene il valore della capacità C .

$$C = \frac{2M}{B_0^2 R^2} = 69.4 \text{ F}$$