

Il dipolo magnetico ed il teorema di equivalenza di Ampère

M.Bassan - A.A. 2010-11

Il momento di dipolo magnetico

Ricapitoliamo brevemente il percorso logico seguito per descrivere i fenomeni magnetostatici: Abbiamo scoperto il campo magnetico tramite l'osservazione di fenomeni di attrazione, repulsione ed orientamento di aghi magnetici.

Abbiamo definito direzione e verso di $\vec{B}$ come quelli in cui si orienta l'estremo N di un magnete. Abbiamo poi osservato come circuiti percorsi da corrente si comportino in maniera analoga agli aghi magnetici.

Abbiamo quindi definito $|B|$ mediante la II formula di Laplace, o mediante la forza di Lorentz: siamo cioè passati a considerarne gli effetti non più su aghi magnetici, ma su cariche in moto.

Ora, con $\vec{B}$ completamente definito, posso infine tornare a definire il momento $\vec{m}$ di un ago magnetico:

- Sappiamo che ha le caratteristiche di un dipolo (poli N e S indivisibili, linee di campo tracciate dalla limatura di ferro in presenza di un ago etc.)
- Sappiamo che un dipolo si orienta in un campo esterno, ossia subisce un momento meccanico.

Possiamo quindi definire l'intensità del vettore dipolo magnetico tramite l'effetto meccanico che subisce in un campo esterno:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

Notare che esiste in letteratura anche un'altra definizione del momento di dipolo:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H} \quad (2)$$

Le due definizioni sono entrambe valide ed equivalenti, ma mutualmente esclusive. Il momento di dipolo magnetico definito nella prima differisce dal secondo per un fattore μ_0 .

ESERCIZIO: Determinare le unità di misura di m nei due casi.

Formalizziamo ora questa analogia tra aghi magnetici e circuiti mediante il **teorema di equivalenza di Ampère**

Consideriamo una spira di superficie S (sia $\hat{n}$ la normale al piano della spira, orientata con la usuale convenzione della mano destra) percorsa da una corrente I . Tale spira è equivalente ad un ago

magnetico di momento pari a:

$$\vec{m} \equiv SI\hat{n} \quad (3)$$

l'equivalenza si manifesta:

I per il modo in cui si comporta (si orienta) in un campo magnetico esterno e

II per il campo magnetico che essa genera.

NOTA: questa definizione del momento magnetico di una spira é coerente con la convenzione di eq.1; nel caso si adotti la convenzione eq.2. occorre includere un fattore μ_0 nella eq.3.

Dimostrazione

I. Consideriamo, come in figura, una spira rettangolare giacente sul piano x-y ($\hat{n} = \hat{z}$); siano i lati 1 e 3 (paralleli all'asse x) di lunghezza l_b e i lati 2 e 4 (// a y) di lunghezza l_a . Sia presente un campo magnetico esterno B giacente, per semplicità, sul piano y-z e che forma un angolo θ con l'asse z: $\hat{B} \cdot \hat{z} = \cos\theta$. Calcoliamo le forze agenti sulla spira usando la II formula di Laplace: $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$:

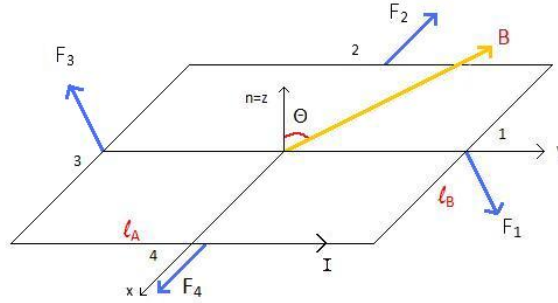


Figure 1: Una spira rettangolare sul piano x-y, immersa in un campo magnetico $\vec{B}$. Le forze sui lati 2 e 4 si bilanciano, mentre quelle agenti sui lati 1 e 3 generano un momento torcente che fa ruotare la spira

sui lati 2 e 4 agiscono due forze, uguali in modulo, parallele ed opposte, $I\ell_a B \sin(\pi/2 - \theta)(\pm\hat{x})$. Queste due forze tendono a deformare la spira; se la spira è rigida, si elidono.

sui lati 1 e 3 agiscono forze, uguali in modulo $I\ell_b B$, parallele ed opposte, ma non collineari: queste due forze generano un momento torcente (una coppia)

$$\vec{M} = \vec{\ell}_a \wedge \vec{F} = IB\ell_a\ell_b \sin\theta(-\hat{x}) \quad (4)$$

Notiamo ora come i vettori $\vec{\ell}_a$ e $\vec{F}$ siano rispettivamente perpendicolari a $\hat{z}$ e $\vec{B}$, e siano tutti contenuti nel piano $x = 0$. Possiamo quindi considerare $-\sin\theta \hat{x}$ anche come risultante di $\hat{B} \wedge \hat{z}$, ed in conclusione riscrivere

$$\vec{M} = IS\hat{n} \wedge \vec{B} \quad (5)$$

Se chiamiamo $IS\hat{n} = \vec{m}$ il momento magnetico della spira, abbiamo ricavato una equazione identica alla eq. 1, QED. Notare che la spira ruota (intorno a x) fino a che la sua normale non è parallela al campo magnetico $\vec{B}$.

QUESITO: se, per non perdere generalità, considerassimo un campo B generico (quindi con componenti $B_x, B_y, B_z \neq 0$, come andrebbe modificata questa dimostrazione ?

Dimostriamo ora **II**:

Calcoliamo il potenziale vettore $\vec{A}$ generato da questa spira; con riferimento alla figura 2, e ricordando che $\vec{A}$ è parallelo alle correnti che lo generano, possiamo scrivere che:

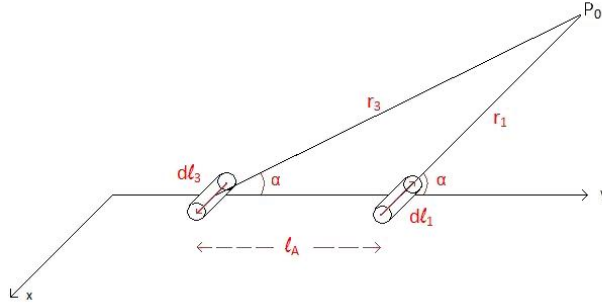


Figure 2: Due segmenti elementari di conduttore, paralleli all'asse x, e la geometria considerata per valutare il loro contributo al potenziale vettore

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{L_1} + \int_{L_3} \frac{\vec{d\ell}}{r - r_0} \\ A_y(\vec{r}_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{L_2} + \int_{L_4} \frac{\vec{d\ell}}{r - r_0} \\ A_z(\vec{r}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Valutiamo la prima componente, A_x , considerando il contributo di una coppia di segmenti di lunghezza infinitesima $d\ell$ lungo i lati 1 e 3. Con le stesse approssimazioni utilizzate nel caso del campo di un dipolo elettrico scriviamo:

$$r_1 \simeq r_3 \simeq r; \quad \alpha_1 \simeq \alpha_3 \simeq \alpha; \quad r_3 - r_1 = \ell_a \cos \alpha = \ell_a \frac{y}{r} \quad (7)$$

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\ell_b} \left\{ \frac{d\ell_3}{r_3} - \frac{d\ell_1}{r_1} \right\} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_3 - r_1}{r^2} \int_0^{\ell_b} d\ell = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ell_a \ell_b \frac{y}{r^3} \quad (8)$$

e, analogamente per la componente y. In definitiva:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ell_a \ell_b \frac{y}{r^3} \\ A_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ell_a \ell_b \frac{x}{r^3} \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Queste relazioni dipendono chiaramente dalla nostra scelta del sistema di riferimento. Possiamo riassumere le eq.9, introducendo la definizione eq.3, in una relazione vettoriale valida in ogni riferimento:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (10)$$

che é formalmente molto simile al potenziale elettrostatico di un dipolo: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Il campo magnetico si ottiene per derivazione diretta delle eq.9:

$$\begin{aligned} B_x = -\partial_z A_y &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3xz}{r^5} \\ B_y = \partial_z A_x &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3yz}{r^5} \\ B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{aligned} \quad (11)$$

oppure, in modo più elegante e generale, usando opportune identità vettoriali applicate alla eq.10. ESERCIZIO: dimostrare (usando le relazioni della vostra tabella) che il campo magnetico vale:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{m} \wedge (\vec{r}/r^3) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \partial_z (\vec{r}/r^3) \quad (12)$$