

Problema n.1

- a) Poiché il corpo si muove seguendo una traiettoria circolare ed è noto il modulo della velocità tangenziale istantanea nel punto A della traiettoria, allora il modulo dell'accelerazione centripeta del corpo in tale punto è

$$|\vec{a}_{c,A}| = \frac{|\vec{v}_A|^2}{R} = 0,125 \text{ m s}^{-2}$$

- b) La seconda legge della dinamica applicata alle componenti radiali delle forze agenti sul corpo nel punto A fornisce la seguente equazione:

$$m \frac{|\vec{v}_A|^2}{R} = m g - |\vec{N}_A| \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$|\vec{N}_A| = m \left(g - \frac{|\vec{v}_A|^2}{R} \right) = 0,97 \text{ N}$$

- c) Considerando la relazione che fornisce $|\vec{N}_A|$ ottenuta nel punto b), si vede che $|\vec{N}_A| = 0 \text{ N}$ allorché $|\vec{v}_A|^2 = g R$, cioè per $|\vec{v}_A| = \sqrt{g R} = 4,43 \text{ m s}^{-1}$

Per valori maggiori di o uguali a questo, il corpo si stacca subito dalla superficie sferica nel punto A.

- d) Essendo nulla la componente verticale della velocità iniziale, la traiettoria del corpo è un arco di parabola discendente con il vertice nella posizione di partenza. Il tempo Δt necessario affinché il corpo colpisca il piano orizzontale deve soddisfare la relazione

$$\frac{1}{2} g (\Delta t)^2 = R$$

da cui si ottiene $\Delta t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$

e dunque la distanza orizzontale percorsa dal corpo in questo intervallo di tempo è

$$\Delta x = |\vec{v}_A| \cdot \Delta t = \sqrt{g R} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2} R$$

e infine la distanza del punto di caduta dalla base della semisfera è

$$D = \Delta x - R = (\sqrt{2} - 1)R = 0,83 \text{ m}$$

- e) Consideriamo una posizione generica P sulla semisfera, che si trovi ad una distanza angolare θ dal punto A, con vertice dell'angolo nel centro della semisfera. Il dislivello Δz tra il punto A e il punto P è, da un semplice calcolo geometrico: $\Delta z = (1 - \cos \theta)R$ e possiamo calcolare il modulo della velocità del corpo quando raggiunge, scivolando, il punto P sfruttando il fatto che l'energia meccanica totale del corpo si conserva (la reazione normale della sfera non compie lavoro e la forza peso, unica altra forza agente, è conservativa). Considerando come livello di riferimento la quota del punto P, risulta pertanto

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2 = m g R (1 - \cos \theta) \quad \text{e quindi}$$

$$|\vec{v}_P|^2 = 2 g R (1 - \cos \theta) \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$|\vec{v}_P| = \sqrt{2 g R (1 - \cos \theta)}$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel punto b), scriviamo la seconda legge della dinamica relativamente alle forze agenti lungo la direzione radiale quando il corpo si trova nel punto P:

$$m \frac{|\vec{v}_P|^2}{R} = m g \cos \theta - |\vec{N}_P|, \quad \text{e quindi il modulo della reazione normale nel punto P è}$$

$$|\vec{N}_P| = m \left(g \cos \theta - \frac{|\vec{v}_P|^2}{R} \right) = m (g \cos \theta - 2g + 2g \cos \theta) = m g (3 \cos \theta - 2)$$

Poiché il corpo si stacca dalla superficie sferica quando il modulo della reazione normale diventa nullo, il punto di distacco si troverà nella posizione angolare $\bar{\theta}$ tale che $\cos \bar{\theta} = \frac{2}{3}$. L'altezza di questa posizione al di sopra del piano orizzontale è quindi

$$H = R \cos \bar{\theta} = \frac{2}{3} R = 1,33 \text{ m}$$

Nel punto P, le componenti della velocità tangenziale sono allora (se prendiamo il verso positivo dell'asse z verso il basso):

$$v_{P,x} = |\vec{v}_P| \cos \bar{\theta} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g R} \quad ; \quad v_{P,z} = |\vec{v}_P| \sin \bar{\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g R}$$

Il tempo t_p necessario affinché il corpo raggiunga il piano orizzontale dall'istante in cui si stacca dalla semisfera nel punto P si ottiene risolvendo rispetto all'incognita t_p la seguente equazione:

$$v_{P,z} t_p + \frac{1}{2} g t_p^2 = H$$

la cui soluzione accettabile è

$$t_P = \sqrt{\left(\frac{v_{P,z}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} - \frac{v_{P,z}}{g} = \frac{\sqrt{23}-\sqrt{5}}{3^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Dunque, la distanza dal centro della sfera del punto d'impatto del corpo con il piano orizzontale è

$$\begin{aligned} \Delta x &= R \sin \bar{\theta} + v_{P,x} t_P = \frac{\sqrt{5}}{3} R + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g R} \cdot \frac{\sqrt{23}-\sqrt{5}}{3^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{2R}{g}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} R + \frac{4}{27} (\sqrt{23}-\sqrt{5}) R = \frac{4\sqrt{23}+5\sqrt{5}}{27} R \end{aligned}$$

e infine la distanza dalla base della sfera del punto d'impatto del corpo con il piano orizzontale è

$$D = \Delta x - R = \left(\frac{4\sqrt{23}+5\sqrt{5}}{27} - 1 \right) R = 0,249 \text{ m}$$

Problema n.2

- a) Le forze agenti sulla sfera sono la forza peso, applicata nel centro di massa della sfera e diretta verticalmente verso il basso, la reazione vincolare normale del piano inclinato, diretta perpendicolarmente a questo e verso l'esterno, e la forza di attrito statico che istantaneamente è applicata nel punto di contatto della sfera con il piano inclinato, è diretta parallelamente a questo e il suo verso è opposto a quello della velocità del centro di massa della sfera. La componente della forza peso perpendicolare al piano inclinato bilancia esattamente la forza di reazione vincolare normale, mentre l'equazione che regola il moto del centro di massa della sfera si ottiene studiando la proiezione parallela al piano inclinato delle forze agenti sulla sfera; per fissare le idee consideriamo un asse di coordinate x parallelo al piano inclinato con verso positivo nel verso discendente del piano stesso, e scriviamo opportunamente la prima equazione cardinale del moto:

$$M a_{CM,x} = M g \sin \theta - |\vec{f}_s|$$

Scriviamo adesso l'equazione del moto rotatorio della sfera rispetto a un osservatore che si trova nel suo centro di massa. L'unica forza che, in questo sistema di riferimento, è rilevante per la rotazione della sfera è la forza di attrito statico esercitata dal piano inclinato sulla sfera (la forza apparente, presente per il fatto che il sistema di riferimento solidale al centro di massa della sfera durante la discesa non è inerziale, ha momento nullo rispetto al centro di massa perché è applicata proprio in questo punto). Scelto come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa della sfera, scriviamo la seconda equazione cardinale del moto:

$$I_{CM} \alpha = R \cdot |\vec{f}_s|$$

dove $I_{CM} = \frac{2}{5} M R^2$ è il momento d'inerzia della sfera rispetto a un asse passante per il suo centro di massa e α è l'accelerazione angolare della sfera attorno a tale asse.

Ricordando che nel moto di puro rotolamento l'accelerazione angolare attorno a un asse passante per il centro di massa è legata all'accelerazione lineare del centro di massa dalla relazione

$$\alpha = \frac{a_{CM,x}}{R}$$

è possibile determinare tutte le quantità incognite risolvendo il sistema delle prime due equazioni scritte sopra

$$\begin{cases} M a_{CM,x} = M g \sin \theta - |\vec{f}_s| \\ \frac{2}{5} M R^2 \frac{a_{CM,x}}{R} = R \cdot |\vec{f}_s| \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $|\vec{f}_s| = \frac{2}{5} M a_{CM,x}$. Sostituendo questa espressione nella prima equazione otteniamo $\frac{7}{5} M a_{CM,x} = M g \sin \theta$, da cui ricaviamo infine

$$a_{CM,x} = \frac{5}{7} g \sin \theta = 1,81 \text{ m s}^{-2}$$

e quindi anche

$$|\vec{f}_s| = \frac{2}{7} M g \sin \theta = 7,25 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

- b) Come noto, risulta $|\vec{f}_s| \leq \mu_s |\vec{N}|$, essendo $|\vec{N}|$ il modulo della forza normale al piano inclinato agente sulla sfera. Per quanto visto al punto a), risulta $|\vec{N}| = M g \cos \theta$ e quindi la disuguaglianza diventa $\frac{2}{7} M g \sin \theta \leq \mu_s M g \cos \theta$ da cui infine ricaviamo $\mu_s \geq \frac{2}{7} \tan \theta$. Quindi, il valore minimo del coefficiente di attrito statico tale che la sfera possa rotolare senza strisciare lungo il piano inclinato è

$$\mu_{s,\min} = \frac{2}{7} \tan \theta = 0,0766$$

- c) La forza di attrito statico non compie lavoro sulla sfera! Potrebbe erroneamente sembrare vero il contrario, dato che nell'equazione che descrive il moto del centro di massa del sistema la forza di attrito statico, applicata al centro di massa, si oppone al moto. Tuttavia la stessa forza di attrito statico svolge un lavoro rotazionale di segno positivo e uguale in valore assoluto al lavoro negativo "di traslazione del centro di massa", come si può facilmente verificare, per cui (al netto di tutti gli effetti in gioco) l'unica forza che compie lavoro sul sistema, nel moto di rotolamento senza strisciamento, è la forza peso (la reazione vincolare normale non compie lavoro poiché è diretta perpendicolarmente alla velocità del centro di massa). Più brevemente si dice anche che, siccome il punto di contatto della sfera con il piano inclinato è istantaneamente fermo, nel moto di puro rotolamento, allora il lavoro svolto dalla forza di attrito statico è nullo (questo, di fatto, equivale al ragionamento più articolato fatto in precedenza). Dunque, l'energia meccanica totale si conserva. Per il secondo teorema di König, l'energia cinetica totale di un corpo rigido è data dalla somma dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno a un asse passante per il centro di massa. Consideriamo come quota di riferimento per l'energia potenziale la quota del centro di massa della sfera nel punto più basso della sua traiettoria, e ricordiamo che inizialmente la sfera è ferma. Il centro di massa della sfera, al termine della discesa, si è abbassato di un tratto h . Usando l'indice f per contrassegnare le grandezze cinematiche della sfera al termine della discesa, la conservazione dell'energia meccanica totale dà quindi la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM,f}|^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_f^2 = M g h$$

e quindi

$$\frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM,f}|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \frac{|\vec{v}_{CM,f}|^2}{R^2} = M g h \quad \text{da cui otteniamo}$$

$$\frac{7}{10} |\vec{v}_{CM,f}|^2 = g h \quad \text{e infine}$$

$$|\vec{v}_{CM,f}| = \sqrt{\frac{10}{7} g h} = 3,744 \text{ m s}^{-1}$$

$$\omega_f = \frac{|\vec{v}_{CM,f}|}{R} = 37,44 \text{ rad s}^{-1}$$

d) Nell'urto in questione il momento totale delle forze esterne agenti sul sistema, calcolato rispetto al punto in cui è imperniata l'asta, è nullo: infatti il momento della forza di reazione del perno è nullo (il polo coincide con la posizione del perno!), i momenti della forza peso dell'asta e della sfera sono nulli (le due forze sono orientate nella stessa direzione dei vettori posizione al momento dell'urto, cioè lungo la verticale) e pure il momento della reazione vincolare normale del piano orizzontale sulla sfera è nullo (anche questa forza è diretta lungo la verticale, dunque nella stessa direzione del vettore posizione all'istante dell'urto). Questi sono tutti i momenti esterni agenti sul sistema. Quindi il momento angolare totale del sistema calcolato rispetto al perno si conserva nell'urto.

La componente del momento angolare totale perpendicolare al piano in cui si svolge tutto il moto del sistema è, subito prima dell'urto (usando il primo teorema di König e facendo attenzione ai segni...):

$$\begin{aligned} L_{1,z} &= -(L+R) M |\vec{v}_{CM,f}| + I_{CM} \omega_f = -(L+R) M |\vec{v}_{CM,f}| + \frac{2}{5} R M |\vec{v}_{CM,f}| = \\ &= -\left(L + \frac{3}{5} R\right) M |\vec{v}_{CM,f}| \end{aligned}$$

e subito dopo l'urto (usando il teorema di Huygens-Steiner per il calcolo dei momenti d'inerzia):

$$L_{2,z} = \left(I_{asta,perno} + I_{sfera,perno}\right) \omega_1 = \left(\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L+R)^2\right) \omega_1$$

La quantità tra parentesi nell'ultimo membro dell'uguaglianza scritta sopra rappresenta il momento d'inerzia I_{tot} del sistema sfera+asta rispetto a un asse passante per il perno e perpendicolare al piano in cui il sistema rigido si muove. Dato che il momento angolare totale si conserva nell'urto (vedi discussione precedente), deve risultare $L_{2,z} = L_{1,z}$ e quindi otteniamo

$$\omega_1 = -\frac{\left(L + \frac{3}{5} R\right) M |\vec{v}_{CM,f}|}{\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L+R)^2} = -3,099 \text{ rad s}^{-1}$$

in cui compare il segno negativo perché la rotazione del sistema dopo l'urto avviene in senso orario se la sfera, prima dell'urto, si muove da destra verso sinistra e il verso positivo dell'asse z è quello uscente dal piano, rivolto verso l'osservatore.

- e) Per calcolare la distanza angolare massima dalla verticale raggiunta dal sistema asta+sfera, si sfrutta il fatto che nel moto successivo all'urto l'energia meccanica totale del sistema si conserva (il lavoro svolto dalla reazione del perno è nullo dato che il punto in cui è applicata è fermo, e l'unica altra forza esterna agente sul sistema è la forza peso). Il centro di massa del sistema asta+sfera si trova ad una distanza dal perno

$$r_{CM} = \frac{m \frac{L}{2} + M(L + R)}{M + m}$$

per cui se indichiamo con θ_{MAX} la distanza angolare massima raggiunta rispetto alla verticale il centro di massa del sistema si innalzerà, allorché l'angolo varia da 0 a θ_{MAX} , di un tratto $\Delta z = r_{CM} (1 - \cos \theta_{MAX})$, e dunque dalla conservazione dell'energia meccanica totale otteniamo la relazione seguente:

$$(M + m) g r_{CM} (1 - \cos \theta_{MAX}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \omega_1^2$$

da cui

$$1 - \cos \theta_{MAX} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \omega_1^2}{(M + m) g r_{CM}}$$

e quindi

$$\cos \theta_{MAX} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \omega_1^2}{(M + m) g r_{CM}}$$

e infine

$$\begin{aligned} \theta_{MAX} &= \arccos \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \omega_1^2}{(M + m) g r_{CM}} \right\} = \\ &= \arccos \left\{ 1 - \frac{\frac{5}{7} \left(L + \frac{3}{5} R \right)^2 M^2 h}{\left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \left[m \frac{L}{2} + M (L + R) \right]} \right\} = 0,893 \text{ rad} = 51^\circ 10' 22'' \end{aligned}$$

- f) Per rispondere a questa ultima domanda è sufficiente imporre che l'argomento della funzione arccos nella formula finale del punto e) sia minore di -1. Quando avviene questo, non esiste nessun angolo che soddisfi le condizioni del punto precedente, e il sistema asta+sfera continuerà a ruotare con moto periodico (non uniforme) attorno al perno. Vediamo quando ciò avviene:

$$\frac{\frac{5}{7} \left(L + \frac{3}{5} R \right)^2 M^2 h}{\left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \left[m \frac{L}{2} + M (L + R) \right]} > 2$$

il che significa

$$h > \frac{\frac{14}{5} \left[\frac{1}{3} m L^2 + \frac{2}{5} M R^2 + M (L + R)^2 \right] \left[m \frac{L}{2} + M (L + R) \right]}{\left(L + \frac{3}{5} R \right)^2 M^2} = 3,83 \text{ m}$$

che è appunto la quota al di sopra della quale la sfera dovrebbe iniziare a rotolare lungo il piano inclinato affinché il sistema asta+sfera, in seguito all'urto totalmente anelastico studiato in questo problema, possa continuare a ruotare effettuando giri completi attorno al perno.

Problema n.3

- a) La forza peso, costante, non influenza le oscillazioni armoniche della pallina sotto l'azione della forza elastica della molla. Quindi la pulsazione del moto armonico della pallina è

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 223,61 \text{ rad s}^{-1}$$

e la sua energia meccanica totale è

$$E_m = \frac{1}{2} k a^2 = 2 \text{ J}$$

- b) Nelle ipotesi fatte, risulta $\Delta E_{\text{int}} = E_m$, e quindi, trascurando la variazione di volume della pallina durante il processo, risulta

$$\Delta E_{\text{int}} = Q_p = m c_b \Delta T_p = E_m$$

da cui ricaviamo

$$\Delta T_p = \frac{E_m}{m c_b} = \frac{k a^2}{2 m c_b} = 7,69 \text{ K}$$

per cui la temperatura della pallina quando smette di oscillare sarà

$$T_p = T_0 + \Delta T_p = 27,69 \text{ }^\circ\text{C} = 300,84 \text{ K}$$

- c) La temperatura di equilibrio del sistema pallina+aria si ricava imponendo che la somma algebrica delle quantità di calore scambiate dalla pallina e dall'aria nel tubicino sia nulla, cioè

$$\Delta Q_a + \Delta Q_p = 0 \text{ J}$$

cioè, indicata con T_e la temperatura di equilibrio da determinare, con n il numero di moli di aria nel tubicino e con $C_v = \frac{5}{2}R$ il calore specifico molare dell'aria (gas biatomico), risulta

$$n C_v (T_e - T_0) + m c_b (T_e - T_p) = 0 \text{ J}$$

e dunque

$$T_e = \frac{n C_V T_0 + m c_b T_p}{n C_V + m c_b} = \frac{\frac{5}{2} pV + m c_b T_p}{\frac{5}{2} \frac{pV}{T_0} + m c_b} = 298,92 \text{ K} = 25,77 \text{ °C}$$

d) Risulta, nel complesso:

$$\begin{aligned} \Delta S_{tot} &= m c_b \ln\left(\frac{T_p}{T_0}\right) + n C_V \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + m c_b \ln\left(\frac{T_e}{T_p}\right) = n C_V \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + m c_b \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) = \\ &= (n C_V + m c_b) \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) = 0,68 \cdot 10^{-2} \text{ J K}^{-1} \end{aligned}$$