

Prova scritta di Fisica per il CdL in Informatica

27/06/2011

SOLUZIONE

Problema n.1

- a) Dalla geometria della figura si ricava che la componente verticale della velocità nel punto A è $v_{A,z} = |\vec{v}_A| \cos \alpha$. Verifica rapida: se ad esempio fosse $\alpha = 0^\circ$, il vettore $\vec{v}_A$ sarebbe diretto lungo l'asse z, nel verso positivo, cioè $v_{A,z} = |\vec{v}_A|$ in accordo con la relazione scritta sopra (dato che $\cos 0^\circ = 1$). Il moto del punto materiale successivo al suo distacco dalla guida nel punto A è parabolico (moto libero sotto l'azione della forza peso), e poiché il moto del punto materiale proiettato sull'asse z è uniformemente accelerato con accelerazione $a_{A,z} = -g$, vale la relazione

$$h = \frac{v_{A,z}^2}{2g} = \frac{|\vec{v}_A|^2 (\cos \alpha)^2}{2g}$$

da cui si ottiene

$$|\vec{v}_A|^2 = \frac{2gh}{(\cos \alpha)^2}$$

e quindi

$$|\vec{v}_A| = \frac{\sqrt{2gh}}{\cos \alpha} = 2,01 \text{ ms}^{-1}$$

Il vettore velocità nel punto B è diretto orizzontalmente verso destra, e poiché nel moto parabolico sotto l'azione della forza peso la componente orizzontale della velocità del corpo rimane costante durante il moto, risulta

$$|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| \sin \alpha = \sqrt{2gh} \cdot \tan \alpha = 0,75 \text{ ms}^{-1}$$

- b) Un punto materiale, che si stia muovendo lungo una guida sotto l'azione di forze esterne tra le quali la reazione normale della guida stessa, si distacca dalla guida nell'istante in cui la reazione normale diventa nulla (o, in altri termini, nell'istante in cui la guida non esercita più alcuna forza sul corpo). Risulta quindi

$$|\vec{T}_A| = 0 \text{ N}$$

Dunque, nel punto A l'unica forza che agisce sul corpo è la forza peso. Ma poiché nell'istante immediatamente precedente al distacco il moto del corpo è ancora circolare, possiamo scrivere la seconda legge della dinamica relativamente alla forza centripeta agente sul corpo nel punto A nel modo seguente, indicando con m la massa del corpo:

$$m \frac{|\vec{v}_A|^2}{R} = mg \sin \alpha$$

da cui si ottiene

$$R = \frac{|\vec{v}_A|^2}{g \sin \alpha} = \frac{1}{g \sin \alpha} \cdot \frac{2gh}{(\cos \alpha)^2} = \frac{2h}{\sin \alpha (\cos \alpha)^2} = 1,10 \text{ m}$$

- c) Durante il moto lungo la guida liscia la reazione normale della guida non compie lavoro (essendo diretta ad ogni istante lungo la direzione perpendicolare a quella del vettore velocità istantanea del corpo), dunque l'unica forza che compie lavoro è la forza peso. Essendo la forza peso conservativa, durante il moto lungo la guida liscia l'energia meccanica totale del corpo si conserva. Se consideriamo come livello di riferimento per l'energia potenziale la quota del punto D, e poiché il punto A si trova al di sopra del punto D di un tratto verticale pari a $R \sin \alpha$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_D|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_A|^2 + m g R \sin \alpha$$

da cui ricaviamo

$$|\vec{v}_D|^2 = |\vec{v}_A|^2 + 2 g R \sin \alpha = \frac{2gh}{(\cos \alpha)^2} + 2 g \sin \alpha \cdot \frac{2h}{\sin \alpha (\cos \alpha)^2} = \frac{6gh}{(\cos \alpha)^2}$$

e infine

$$|\vec{v}_D| = \frac{\sqrt{6gh}}{\cos \alpha} = 3,48 \text{ ms}^{-1}$$

Dato che la componente radiale della forza peso nel punto D è nulla, la forza centripeta agente sul corpo nel punto D è dovuta soltanto alla reazione normale della guida circolare in quel punto. Il modulo della reazione vincolare normale nel punto D è quindi

$$|\vec{T}_D| = m \frac{|\vec{v}_D|^2}{R} = m \frac{6gh}{(\cos \alpha)^2} \frac{\sin \alpha (\cos \alpha)^2}{2h} = 3 m g \sin \alpha = 11,02 \text{ N}$$

- d) Per calcolare $|\vec{v}_0|$ conviene considerare come livello di riferimento per l'energia potenziale il punto più basso del piano inclinato, e sfruttare la conservazione dell'energia meccanica totale uguagliando l'energia meccanica totale alla base del piano inclinato (dove, per la scelta fatta, è solo energia cinetica) con quella calcolata, ad esempio, nel punto D che si trova ad una quota $L + R \cos \alpha$ al di sopra della base del piano inclinato. Risulta pertanto:

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_D|^2 + m g (L + R \cos \alpha)$$

Da qui otteniamo:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_0|^2 &= |\vec{v}_D|^2 + 2g(L + R \cos \alpha) = \frac{6gh}{(\cos \alpha)^2} + 2g \left(L + \frac{2h}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = \\ &= 2g \left[\left(\frac{3}{(\cos \alpha)^2} + \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) h + L \right] \end{aligned}$$

e infine, quindi:

$$|\vec{v}_0| = \sqrt{2g \left[\left(\frac{3}{(\cos \alpha)^2} + \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) h + L \right]} = 6,00 \text{ ms}^{-1}$$

Problema n.2

- a) Indicando con v_x e v_y le componenti rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y del vettore velocità del proiettile prima dell'urto, e tenuto conto del fatto che prima dell'urto il proiettile si muove parallelamente all'asse x e l'asta è ferma, le componenti del vettore velocità del centro di massa del sistema si calcolano senza grosse difficoltà e sono:

$$v_{CM,x} = \frac{mv_x}{M+m} = 0,70 \text{ ms}^{-1} \quad ; \quad v_{CM,y} = 0 \text{ ms}^{-1}$$

- b) Nell'istante dell'urto le coordinate del centro di massa C del sistema sono

$$x_{CM} = 0 \text{ m} \quad ; \quad y_{CM} = -\frac{mL/2}{M+m} = -0,14 \text{ m}$$

Poiché il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme, dai risultati appena ottenuti concludiamo che il centro di massa del sistema considerato si muove lungo la retta di equazione

$$y = y_{CM}$$

con la velocità calcolata nel punto a).

Essendo il sistema proiettile + asta isolato, il suo momento angolare totale si conserva. Conviene calcolarlo rispetto alla posizione del punto C nell'istante in cui avviene l'urto. Solo la componente z (perpendicolare al piano xy) del momento angolare totale è non nulla, dato che subito prima dell'urto il momento angolare totale è

$$L_x = 0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad L_y = 0 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad L_z = \left(\frac{L}{2} - |y_{CM}| \right) m v_x = \frac{Mm}{M+m} \frac{L}{2} v_x$$

e ciascuna di queste componenti deve mantenere lo stesso valore a qualsiasi istante per quanto detto poc'anzi.

Subito dopo l'urto, il sistema proiettile + asta ruota attorno ad un asse perpendicolare al piano xy e passante per il centro di massa del sistema, mentre

quest'ultimo si muove lungo una linea retta con velocità costante. La rotazione non può avvenire attorno a nessun altro asse, per due motivi: anzitutto, per quanto detto in precedenza il centro di massa del sistema non può ruotare e quindi l'asse di rotazione deve necessariamente passare per il centro di massa; in secondo luogo, se l'asse di rotazione non fosse orientato perpendicolarmente al piano xy le componenti lungo gli assi x e y del momento angolare dopo l'urto sarebbero non nulle, la qual cosa è impossibile per quanto detto in precedenza.

Se indichiamo con I' il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse passante per il punto C, il momento d'inerzia del sistema proiettile + asta rispetto a un asse passante per il punto C è, sfruttando il teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned} I_C &= I' + m \left(\frac{L}{2} - |y_{CM}| \right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + M y_{CM}^2 + m \left(\frac{L}{2} - |y_{CM}| \right)^2 = \\ &= \frac{1}{12} M L^2 + M \frac{m^2}{(M+m)^2} \frac{L^2}{4} + m \frac{M^2}{(M+m)^2} \frac{L^2}{4} = \\ &= \frac{1}{12} M L^2 + \frac{mM(M+m)}{(M+m)^2} \frac{L^2}{4} = \frac{M L^2}{12} \left(1 + \frac{3m}{M+m} \right) = \\ &= \frac{M L^2}{12} \frac{M+4m}{M+m} \end{aligned}$$

Dopo l'urto, la componente lungo l'asse z del momento angolare totale del sistema rispetto al punto C è data soltanto dal moto di rotazione del sistema attorno all'asse passante per il centro di massa del sistema e perpendicolare al piano xy . Quindi risulta:

$$I_C \omega = \frac{Mm}{M+m} \frac{L}{2} v_x$$

e quindi la velocità angolare di rotazione del sistema dopo l'urto sarà

$$\omega = \frac{1}{I_C} \frac{Mm}{M+m} \frac{L}{2} v_x = \frac{12}{M L^2} \frac{M+m}{M+4m} \frac{Mm}{M+m} \frac{L}{2} v_x = \frac{6m v_x}{(M+4m)L} = 1,05 \text{ rad s}^{-1}$$

- c) L'energia cinetica totale del sistema proiettile + asta dopo l'urto si può calcolare usando il secondo teorema di König:

$$\begin{aligned}
K_{TOT} &= \frac{1}{2}(M+m)\left|\overrightarrow{v_{CM}}\right|^2 + \frac{1}{2}I_C \omega^2 = \\
&= \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2 v_x^2}{(M+m)^2} + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\frac{M+4m}{M+m}\frac{36m^2 v_x^2}{(M+4m)^2 L^2} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m^2 v_x^2}{M+m}\left(1 + \frac{3M}{M+4m}\right) = \frac{1}{2}\frac{m^2 v_x^2}{M+m}\frac{4(M+m)}{M+4m} = \\
&= \frac{2m^2 v_x^2}{M+4m} = 6,92 \text{ J}
\end{aligned}$$

Problema n.3

- a) La temperatura T_F raggiunta all'equilibrio termico dal sistema acqua+metallo si ottiene dalla condizione che la somma algebrica delle quantità di calore scambiate dall'acqua e dal campione di metallo sia nulla:

$$Q_A + Q_M = 0 \text{ J}$$

In termini dei dati del problema questa equazione diventa

$$m_A c_A (T_F - T_0) = m_M c_M (T_F - T_M)$$

da cui

$$(m_A c_A + m_M c_M) T_F = m_A c_A T_0 + m_M c_M T_M$$

e infine

$$T_F = \frac{m_A c_A T_0 + m_M c_M T_M}{m_A c_A + m_M c_M} = 299,29 \text{ K} = 26,14 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- b) La variazione di entropia di un sistema dopo che ha scambiato una data quantità di calore Q con l'esterno è data dalla relazione

$$\Delta S = \int_0^Q \frac{1}{T(Q')} \delta Q'$$

in cui $T(Q')$ è la temperatura del sistema dopo che ha scambiato con l'esterno la quantità di calore Q' , e l'integrale è calcolato lungo una qualsiasi trasformazione reversibile che connette lo stato iniziale allo stato finale del sistema. Nel caso di un corpo di massa m e calore specifico c , la variazione di entropia in questione è quindi data da

$$\Delta S = \int_0^Q \frac{1}{T(Q')} \delta Q' = \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T} \frac{\delta Q'}{\delta T} dT = \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T} mc dT = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

La variazione di entropia del metallo nel passaggio dalla temperatura T_M alla temperatura T_F è quindi

$$\Delta S_M = m_M c_M \ln\left(\frac{T_F}{T_M}\right) = -959,13 \text{ JK}^{-1}$$

e la variazione di entropia dell'acqua nel passaggio dalla temperatura T_0 alla temperatura T_F è di conseguenza

$$\Delta S_A = m_A c_A \ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right) = 1735,40 \text{ JK}^{-1}$$

per cui la variazione di entropia complessiva del sistema metallo+acqua nel processo descritto è

$$\Delta S_{AM} = \Delta S_M + \Delta S_A = 776,27 \text{ JK}^{-1}$$

- c) In questa seconda trasformazione bisogna calcolare, oltre alle variazioni di entropia dell'acqua e del metallo, anche la variazione di entropia dell'ambiente, sistema che rimane a temperatura fissata mentre scambia calore con l'acqua e il metallo. Per un sistema che resta a temperatura fissata T^* mentre scambia calore con un sistema di N corpi, con massa del corpo i -esimo m_i , calore specifico del corpo i -esimo c_i , e variazione di temperatura del corpo i -esimo durante lo scambio termico ΔT_i , la variazione di entropia è quindi

$$\Delta S = - \frac{\sum_{i=1}^N m_i c_i \Delta T_i}{T^*}$$

La variazione di entropia del metallo è

$$\Delta S_M = m_M c_M \ln\left(\frac{T_0}{T_F}\right) = -18,57 \text{ JK}^{-1}$$

mentre la variazione di entropia dell'acqua è

$$\Delta S_A = m_A c_A \ln\left(\frac{T_0}{T_F}\right) = -1735,40 \text{ JK}^{-1}$$

e la variazione di entropia dell'ambiente è (in base a quanto visto poc'anzi)

$$\Delta S_{amb} = \frac{(m_A c_A + m_M c_M)(T_F - T_0)}{T_0} = 1772,27 \text{ JK}^{-1}$$

La variazione di entropia complessiva è quindi

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{amb} + \Delta S_M + \Delta S_A = 18,30 \text{ JK}^{-1}$$