

Soluzione

Problema n. 1

- a) Sul punto materiale agiscono la forza peso e la tensione della fune. La tensione della fune in ogni istante è diretta lungo la direzione perpendicolare alla traiettoria circolare lungo cui si muove il punto materiale, per cui la tensione della fune non compie lavoro. L'unica forza che compie lavoro è pertanto la forza peso, che è conservativa. Dunque l'energia meccanica totale del punto materiale si conserva. Scegliendo come quota di riferimento per l'energia potenziale della forza peso la quota del punto più basso della traiettoria, risulta che il punto più alto della traiettoria si trova alla quota $2l = 2\text{ m}$, e quindi il modulo della velocità del corpo nel punto più alto della traiettoria si ottiene

$$\text{dall'equazione } \frac{1}{2} m |\vec{v}_a|^2 + m g \cdot (2l) = \frac{1}{2} m |\vec{v}_b|^2, \text{ da cui risulta } |\vec{v}_a| = \sqrt{|\vec{v}_b|^2 - 4gl} = 4,976 \text{ ms}^{-1}$$

- b) Nel punto più basso della traiettoria, per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere

$$m |\vec{a}_{C,b}| = |\vec{T}_b| - m g, \text{ da cui otteniamo } |\vec{T}_b| = m (|\vec{a}_{C,b}| + g) = m \left(\frac{|\vec{v}_b|^2}{l} + g \right) = 3,69 \text{ N}$$

Nel punto più alto della traiettoria, sempre per la seconda legge della dinamica possiamo scrivere

$$m |\vec{a}_{C,a}| = |\vec{T}_a| + m g, \text{ da cui otteniamo}$$

$$|\vec{T}_a| = m (|\vec{a}_{C,a}| - g) = m \left(\frac{|\vec{v}_a|^2}{l} - g \right) = m \left(\frac{|\vec{v}_b|^2}{l} - 5g \right) = 0,75 \text{ N}$$

- c) Poiché il modulo di un vettore non può mai essere una quantità negativa, dall'ultima equazione

$$\text{scritta al punto b) ricaviamo la relazione } \frac{|\vec{v}_a|^2}{l} - g \geq 0 \text{ ms}^{-2}, \text{ e di conseguenza risulta } |\vec{v}_a|^2 \geq gl,$$

da cui $|\vec{v}_a| \geq \sqrt{gl}$, e quindi il valore richiesto è $|\vec{v}_a|^* = \sqrt{gl} = 3,13 \text{ ms}^{-1}$. A questo valore del modulo della velocità nel punto più alto della traiettoria corrisponde, nel punto più basso della traiettoria, il valore $|\vec{v}_b|^*$ che si calcola sfruttando la conservazione dell'energia meccanica totale:

$$\frac{1}{2} m (|\vec{v}_b|^*)^2 = \frac{1}{2} m (|\vec{v}_a|^*)^2 + m g (2l), \text{ da cui otteniamo}$$

$$|\vec{v}_b|^* = \sqrt{(|\vec{v}_a|^*)^2 + 4gl} = \sqrt{5gl} = 7,00 \text{ ms}^{-1}$$

Problema n. 2

- a) L'urto tra il proiettile e il blocco è totalmente anelastico. A rigore, il sistema non è isolato: subito prima dell'urto la tensione della fune e la forza peso del blocco si bilanciano esattamente, ma dopo l'urto questo non è più vero poiché il blocco (contenente anche il proiettile) inizia a muoversi lungo una traiettoria circolare, e quindi il modulo della tensione della fune, immediatamente dopo l'urto, sarà maggiore del modulo della forza peso del sistema blocco + proiettile. Ma lungo la direzione orizzontale tutte le forze sopra menzionate hanno componente nulla (infatti sono tutte dirette lungo la direzione verticale), e quindi in ogni caso la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema si conserva nell'urto, e questo è sufficiente per impostare l'equazione risolutiva del primo quesito del problema. Poiché dopo l'urto il sistema è costituito da un unico blocco di massa $M_b + m_p$, possiamo scrivere: $(M_b + m_p) v_{b,x} = m_p v_{p,x}$, dove con l'indice x si è indicata la

componente orizzontale delle velocità. Risulta pertanto $|\vec{v}_b| = |v_{b,x}| = \frac{m_p |\vec{v}_p|}{M_b + m_p} = 3,846 \text{ m s}^{-1}$

- b) Dopo l'urto, sul sistema blocco + proiettile agiscono la forza peso e la tensione della fune. Ragionando in maniera analoga a quanto fatto nella soluzione del problema n. 1, punto a), si osserva che l'energia meccanica totale del sistema si conserva. L'altezza massima viene raggiunta nell'istante in cui la velocità del sistema blocco + proiettile si annulla. Possiamo quindi scrivere:

$$(M_b + m_p) g h_M = \frac{1}{2} (M_b + m_p) |\vec{v}_b|^2, \text{ e quindi } h_M = \frac{|\vec{v}_b|^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{m_p |\vec{v}_p|}{M_b + m_p} \right)^2 = 0,754 \text{ m}.$$

In corrispondenza di questa quota, la fune forma un angolo θ_M con la direzione verticale che si può calcolare analizzando la geometria del problema. Risulta infatti $L - h_M = L \cos \theta_M$, e quindi

$$\theta_M = \arccos \left(1 - \frac{h_M}{L} \right) = 0,898 \text{ rad} = 51^\circ 27' 48''$$

- c) Per calcolare l'accelerazione angolare del sistema nel suo punto di massima elongazione basta scrivere la seconda legge della dinamica relativa al moto tangenziale, osservando che la componente tangenziale della forza peso (che è l'unica forza che influisce sul moto tangenziale, poiché la tensione della fune è sempre diretta lungo il raggio della traiettoria) ha segno opposto rispetto allo spostamento angolare, per cui risulta $m a_t (\theta = \theta_M) = -m g \sin \theta_M$, avendo indicato con a_t la componente tangenziale dell'accelerazione del sistema. Nel moto circolare di raggio L l'accelerazione tangenziale è legata all'accelerazione angolare α dalla relazione $\alpha L = a_t$, per cui l'accelerazione angolare del sistema nel punto estremo della sua traiettoria è

$$\alpha (\theta = \theta_M) = -\frac{g}{L} \sin \theta_M = -\frac{g}{L} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{h_M}{L} \right)^2} = -3,837 \text{ rad s}^{-2}$$

Problema n. 3

- a) Usando l'equazione di stato dei gas perfetti otteniamo

$$n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273,15} \text{ mol} = 0,04463 \text{ mol}, \text{ essendo } R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ la costante universale dei gas}$$

- b) Nella trasformazione isocora reversibile A-B risulta $T_B = \frac{p_B}{p_A} T_A = 2 T_A = 546,30 \text{ K} = 273,15^\circ \text{C}$. Il

lavoro compiuto dal gas in una trasformazione isocora è nullo, per cui la quantità di calore assorbita dal gas in questa trasformazione, per la prima legge della termodinamica, è uguale alla variazione di energia interna del gas. Risulta quindi

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = n C_V (T_B - T_A) = \frac{3}{2} n R (T_B - T_A) = \frac{3}{2} p_A V_A \left(\frac{T_B}{T_A} - 1 \right) = \frac{3}{2} p_A V_A = 151,95 \text{ J}, \text{ dato}$$

che il calore specifico molare a volume costante per un gas monoatomico è $C_V = \frac{3}{2} R$

- c) La temperatura nello stato C si ottiene dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_C = \frac{p_C V_C}{n R} = \frac{p_B V_C}{R} \frac{R T_A}{p_A V_A} = \frac{p_B}{p_A} \frac{V_C}{V_A} T_A = 4 T_A = 1092,60 \text{ K} = 819,45^\circ \text{C}, \text{ in cui si è posto}$$

$p_C = p_B$ dato che la trasformazione B-C è isobara. Per la prima legge della termodinamica, la quantità di calore assorbita dal gas in questa trasformazione è

$$Q_{BC} = W_{BC} + \Delta U_{BC} = p_B (V_C - V_B) + n C_V (T_C - T_B) = 2 p_A V_A + 3 p_A V_A = 5 p_A V_A = 506,5 \text{ J}$$

- d) Dall'equazione di stato dei gas perfetti otteniamo

$$T_D = \frac{p_D V_D}{n R} = \frac{V_C}{V_A} T_A = 2 T_A = 546,30 \text{ K} = 273,15^\circ \text{C}. \text{ La quantità di calore scambiata dal gas con}$$

l'esterno in questa trasformazione, per la prima legge della termodinamica, è uguale alla sola variazione di energia interna, trattandosi di una trasformazione a volume costante:

$$Q_{CD} = n C_V (T_D - T_C) = -3 p_A V_A = -303,9 \text{ J}$$

- e) Nella trasformazione D-A la quantità di calore scambiate da gas con l'esterno, per la prima legge della termodinamica, è

$$Q_{DA} = W_{DA} + \Delta U_{DA} = p_A (V_A - V_D) + n C_V (T_A - T_D) = -\frac{5}{2} p_A V_A = -253,25 \text{ J}$$

- f) Il lavoro compiuto dal gas in un ciclo è semplicemente

$$W_{ciclo} = (p_B - p_A)(V_C - V_A) = p_A V_A = 101,3 \text{ J}. \text{ Il calore assorbito dal gas in un ciclo è}$$

$$Q_{ass,ciclo} = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{13}{2} p_A V_A = 658,45 \text{ J}, \text{ e il rendimento infine sarà}$$

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{ass,ciclo}} = \frac{2}{13} \cong 0,154$$