

Ragionamento Automatico e Logica Proposizionale

Roberto Basili
Fabio Massimo Zanzotto

Cos'è l'Intelligenza Artificiale?

- Comportamento intelligente di manufatti (entità artificiali)?
- Un '*comportamento intelligente*' include
 - *percezione*
 - *ragionamento*
 - *apprendimento*
 - *comunicazione*
 - *azione ...*
- ... in un ambiente complesso

Scopi dell'IA

- Ingegneristico
 - Sviluppo di macchine, dispositivi capaci di comportamento intelligente
 - (almeno) “capaci quanto l'uomo”
- Scientifico
 - Comprensione della nozione di comportamento intelligente

Intelligenza nelle macchine?

- Nozione troppo complessa per essere progettata ed implementata
- Analogia: meteorologia globale
 - Anche se conoscessimo “tutto” riguardo al tempo ...
 - tale “tutto” non ci basterebbe per riprodurre artificialmente il tempo
 - E' necessario cioe' un sistema complesso quanto il sistema meteorologico stesso
- Puo' quindi l'intelligenza manifestarsi al di fuori di un essere umano?

Cosa significa “pensare”

- Pensiamo ad una verifica indiretta piuttosto che ad una definizione
- Il test di Turing
 - Una persona C che fa solo domande può determinare chi tra A e B e' una donna
 - Rimpiazza A con una macchina
 - C sbaglierà ora con più frequenza?
 - A ora penserà'?
- Versione semplificata: una macchina e C

Approcci all'IA

- Quali sono le migliori direzioni lungo la strada “verso” l'intelligenza?
 - cercare i fondamenti della ricerca di lungo termine
o
 - produrre risultati immediati
 - forse e' necessaria una combinazione
- I maggiori raggruppamenti (grossolani) esistenti sono
 - Approcci simbolici (o basati su conoscenza)
 - Approcci subsimbolici

Approcci Simbolici

- Approcci basati su conoscenza (*knowledge-based*)
 - Basi di conoscenza dichiarative (KB)
 - Operatori logici vengono applicati alle KB per produrre/derivare conseguenze
- Molti approcci distinguono:
 - Livello della conoscenza (quale conoscenza e' necessaria)
 - Livello dei simboli (come rappresentarla)
 - Implementazione (come elaborarla)

Approcci Subsimbolici

- Stile *bottom-up*
 - "segui la evoluzione dell'uomo"
 - Parti dai segnali/percezioni e reazioni semplici negli animali
 - entita' piu' complesse evolvono da queste
- *Symbol grounding*
 - interazione macchina-ambiente:
 - segnali di input à simboli
 - azioni sui simboli à effetti nell'ambiente
 - Comportamento emergente: funzione sia della macchina che dell'ambiente

Verso l'intelligenza

- Informazioni + meccanismi di inferenza =
ragionamento
- Dominio + Ambiente + ragionamento =
agente intelligente
- Tratteremo quindi
 - rappresentazione del dominio (e ambiente)
 - meccanismo/i di ragionamento
 - Sistemi basati su conoscenza
 - applicazioni al TAL

Rappresentazione della conoscenza

- Fondamento dei sistemi per il ragionamento automatico
- Formalmente:
 - Linguaggi di rappresentazione ...
 - cioè sistemi di sintassi/semantica
 - Dotati di propri meccanismi di inferenza
- Implementazione:
 - Reti semantiche e *frames*

Un primo esempio di logica: il calcolo delle proposizioni

- Applica vincoli ai valori di specifiche proprietà
- Linguaggio + regole di inferenza
- Definizione di Prova
- Semantica

Vincoli sui valori delle proprietà

- In generale valgono due modi di descrivere il mondo
 - Proprietà (binarie): *descrizioni* per ciò che sussiste e ciò che non sussiste
 - Modelli ad icone: *simulazioni* di alcuni aspetti del mondo
- Vantaggi delle rappresentazioni iconiche
 - Associazione diretta con il problema
 - A volte maggiore efficienza

Vantaggi delle proprietà

- Facilitano la comunicazione
- Elaborazione meno complessa (per es. nel caso binario, 0/1)
- Possono essere derivabili per *inferenza* da altre proprietà
 - Alcune proprietà non corrispondono direttamente a percezioni!
 - Provengono da vincoli propri del mondo/dominio
- Talvolta le informazioni non si possono rappresentare in modo iconico
 - Leggi generali (ogni x ha la proprietà p)
 - Informazione negativa (x non ha la proprietà p)
 - Informazioni incerte (x e' p o q)

Inferenza e Ragionamento

- Questa conoscenza puo' essere formulata come:
 - *Vincoli* sui valori delle proprietà
 - Vincoli = conoscenza relativa al dominio
- Poi nuova informazione e' prodotta da
 - *ragionamento* a partire dallo stato corrente
 - (*Piuttosto che proiettarla a partire dagli stati futuri*)
- Nei sistemi esperti (tipica applicazione di IA)
 - Proprietà' descrivono un sistema fisico
 - I vincoli codificano le leggi del sistema
 - Ragionare dai *sintomi* alle *cause* produce una *diagnosi*

Esempio

- Un Robot puo' sollevare un blocco se:
 - Il *blocco* è *sollevabile* e
 - La *batteria* e' *adeguata*
- Tali condizioni sono esprimibili con vincoli binari (booleano)
 - X1: **bat_ok** (batteria adeguata)
 - X2: **liftable** (sollevabile)
 - X3: **moves** (solleva)

Esempio (2) ...

- Assumiamo:
 - **bat_ok** e **moves** possono essere percepiti dall'ambiente ma **liftable** no
 - Come determinare **liftable**?
 - Sappiamo (senso comune)
 - Se veri X1 e X2 allora e' vero anche X3
(Se X1=X2=1 allora X3=1)
 - Ragionamento:
 - Se X3=0 allora X1=0 o X2=0
 - Se X1=1 allora X2=0 (e viceversa)
- Come automatizzare tutto cio?

Cosa ci serve?

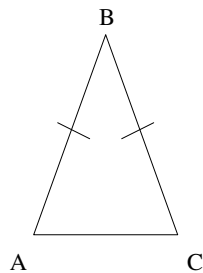
- Un linguaggio per esprimere
 - Proprieta'
 - Vincoli sui loro valori
- Meccanismi di inferenza per eseguire il ragionamento
- Scelte possibili
 - Calcolo proposizionale
 - Calcolo dei predicati
 - Logiche di ordine superiore

Cosa costituisce una 'logica'?

- Un Linguaggio (*sintassi*)
 - Definisce le frasi legali el linguaggio
- Una Semantica
 - Ci dice cose significano le frasi (e le inferenze)
 - Determina il collegamento tra il linguaggio ed il mondo descritto
- Regole di inferenza
 - Suggestiscono metodi per manipolare le frasi scritte nel nostro linguaggio

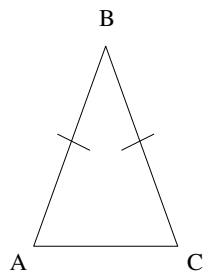
Verso la Logica Proposizionale: un esempio

- Semplice Teorema di Geometria



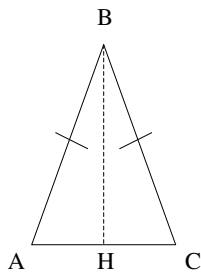
Dato un triangolo isoscele ovvero con $AB=BC$, si vuole dimostrare che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}$ sono uguali.

Conoscenze pregresse



- (A - Assioma) Se due triangoli sono uguali, i due triangoli hanno lati ed angoli uguali
- (T- Teorema) Se due triangoli hanno due lati e l'angolo sotteso uguali, allora i due triangoli sono uguali

Dimostrazione

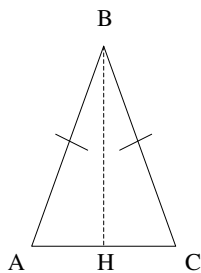


- BH bisettrice di ABC cioè $\angle ABH = \angle HBC$ (Costruzione C)

Dimostrazione

- $AB = BC$ *per ipotesi H*
- $\angle ABH = \angle HBC$ *per C*
- Il triangolo HBC è uguale al triangolo ABH *per T*
- $\angle A = \angle C$ *per A*

Come avviene la dimostrazione



Abbiamo trasformato:

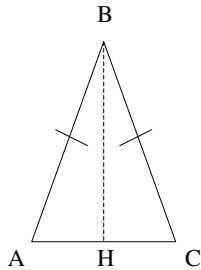
T in

$\Rightarrow$ Se $AB = BC$ e $BH = BH$ e $\angle ABH = \angle HBC$, allora il triangolo ABH è uguale al triangolo HBC

A in

$\Rightarrow$ Se triangolo ABH è uguale al triangolo HBC, allora $AB = BC$ e $BH = BH$ e $\angle ABH = \angle HBC$ e $\angle A = \angle C$

Semplice Teorema: Formalizzazione



Riflessione:

Abbiamo razionalizzato il processo
che permette di affermare che:

$$AB=BC \quad \vdash \quad \hat{A}=\hat{C}$$

dove l'ipotesi H e' $AB=BC$

Formalizzazione

$$AB=BC \quad \vdash \quad \hat{A}=\hat{C}$$

Ipotesi e costruzione formano un insieme di premesse:

$$S=\{AB=BC, ABH=HBC, BH=BH\}$$

Le conoscenze pregresse possono essere scritte come
segue:

$$T: AB=BC \wedge BH=BH \wedge ABH=HBC \Rightarrow$$

$$\text{tr}ABH=\text{tr}HBC$$

$$A: \text{tr}ABH=\text{tr}HBC \Rightarrow$$

$$AB=BC \wedge BH=BH \wedge AH=HC \wedge$$

$$A\hat{B}H=H\hat{B}C \wedge A\hat{H}B=C\hat{H}B \wedge \hat{A}=\hat{C}$$

Formalizzazione e Prova

$$AB=BC \quad \vdash \quad \hat{A}=\hat{C}$$

Abbiamo costruito una *catena* di formule:

P1: $AB=BC$	da S
P2: $ABH=HBC$	da S
P3: $BH=BH$	da S
P4: $AB=BC \wedge BH=BH \wedge ABH=HBC$	da P1,P2,P3 (<i>Inferenza!</i>)
P5: $\text{tr}ABH=\text{tr}HBC$	da P4,T (<i>MP!</i>)
P6: $AB=BC \wedge BH=BH \wedge AH=HC \wedge ABH=HBC \wedge AHB=CHB \wedge \hat{A}=\hat{C}$	da P5,A
P7: $\hat{A}=\hat{C}$	da P6 (<i>Inferenza!</i>)

Processo di dimostrazione

$$S \quad \vdash \quad F$$

Una dimostrazione per

F è conseguenza di S

è una sequenza

$$\text{DIM}=P_1, P_2, \dots, P_n$$

dove

- $P_n=F$
- $P_i \in S$ oppure P_i è ottenibile da $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ (con $i_1 < i, \dots, i_m < i$) applicando una delle **regole di inferenza**

Regole di inferenza: *Modus Ponens* (MP)

$$\frac{P \Rightarrow B, P}{B} \text{ MP}$$

Se piove, la strada è bagnata.

Piove.

Allora la strada è bagnata.

Regole di inferenza:

AND-Introduzione (AI) e AND-Eliminazione(AE)

AND-Introduzione

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \text{ AI}$$

AND-Eliminazione

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}{A_i} \text{ AE}$$

Calcolo Proposizionale Sistema (d'assiomi) SINTASSI

Ingredienti:

- Un insieme di simboli **L**
 - **Letterali:** $A_1, \dots, A_n$
 - **Connettivi Logici:** $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, (,)$
- Un sottoinsieme FBF di L^* detto delle formule ben formate

Calcolo Proposizionale Sistema (d'assiomi) SINTASSI

Ingredienti:

- Un insieme $\text{ASSIOMI} \subseteq \text{FBF}$
- Un insieme **R** di **regole di inferenza**

Abbiamo a disposizione:

- Meccanismo della **dimostrazione**

$S \quad \vdash \quad F$

Connettivi Logici

	SIMBOLO	
NOT	$\neg$	$\sim$
AND	$\wedge$	
OR	$\vee$	
IMPLIES	$\Rightarrow$	$\supset$
IFF	$\Leftrightarrow$	

FBF formule ben formate

- **I letterali sono formule ben formate**
- Se $A \in \text{FBF}$ e $B \in \text{FBF}$, allora
 - $\neg A \in \text{FBF}$
 - $A \wedge B \in \text{FBF}$
 - $A \vee B \in \text{FBF}$
 - $A \Rightarrow B \in \text{FBF}$

Assiomi (Conoscenze pregresse)

- **A1:** $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- **A2:** $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- **A3:** $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$
- **A4:** $\neg(A \wedge \neg A)$
- **A5:** $A \vee \neg A$

Esempio

**Se l'unicorno è mitico, allora è immortale,
ma se non è mitico allora è mortale.**

Se è mortale o immortale, allora è cornuto.

L'unicorno è magico se è cornuto.

Domande:

- a) L'unicorno è magico?
- b) L'unicorno è cornuto?

Procedimento

1. Esprimere il problema in forma di logica dei predicati
2. Individuare i teoremi da dimostrare
3. Dimostrare i teoremi

Esempio

**Se I' (unicorno è mitico), allora I' (unicorno è immortale), ma se non (è mitico) allora (è mortale).
Se I' (unicorno è mortale) o I' (unicorno è immortale), allora (unicorno è cornuto). L' (unicorno è magico) se I' (unicorno è cornuto).**

Letterali:

UM = unicorno è mitico

UI = unicorno è immortale

UMag = unicorno è magico

UC = unicorno è cornuto

Esempio

Se $I'(\text{unicorno è mitico})^{UM}$, allora $I'(\text{unicorno è immortale})^{UI}$, ma se non $(\text{è mitico})^{UM}$ allora $(\text{è mortale})^{\neg UI}$. Se $I'(\text{unicorno è mortale})^{\neg UI}$ o $I'(\text{unicorno è immortale})^{UI}$, allora $(\text{unicorno è cornuto})^{UC}$. $L'(\text{unicorno è magico})^{UMag}$ se $I'(\text{unicorno è cornuto})^{UC}$.

Traduzione:

$UM \Rightarrow UI$

$\neg UM \Rightarrow \neg UI$

$\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$

$UC \Rightarrow UMag$

Esempio

a) $L'(\text{unicorno è magico})$

b) $L'(\text{unicorno è cornuto})$

Traduzione:

$S = \{UM \Rightarrow UI, \neg UM \Rightarrow \neg UI, \neg UI \vee UI \Rightarrow UC, UC \Rightarrow Umag\}$

a) $S \vdash UMag$

b) $S \vdash UC$

Esempio

$$S \vdash UC$$

P1: $\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$	da S
P2: $\neg UI \vee UI$	da A4
P3: UC	da P1, P2 e MP

Esempio

$$S \vdash UMag$$

P1: $\neg UI \vee UI \Rightarrow UC$	da S
P2: $\neg UI \vee UI$	da A4
P3: UC	da P1, P2 e MP
P4: $UC \Rightarrow UMag$	da S
P5: UMag	da P3, P4 e MP

Ricapitolando

- Logica Proposizionale (fin qui vista)
 - Permette di imbrigliare dei ragionamenti in dei simboli
 - Permette di dedurre simboli da altri simboli
 - Cosa manca?
Il concetto di Vero e di Falso

Logica Proposizionale SEMANTICA

Funzione di interpretazione I

$$I : \text{FBF} \rightarrow \{V, F\}$$

dove V e' vero e F sta per falso

I è **composizionale** ovvero:

Per qualsiasi A e B in FBF

$$\begin{aligned} I(\neg A) &= \neg I(A) \\ I(A \wedge B) &= I(A) \wedge I(B) \\ I(A \vee B) &= I(A) \vee I(B) \\ I(A \Rightarrow B) &= I(A) \Rightarrow I(B) \end{aligned}$$

Semantica nella Logica Proposizionale

Cosa significa?

$$I(A) = V \text{ (vero)} \text{ o } I(A) = F \text{ (falso)}$$

Una FBF A e' vera quando A esprime una proprieta' che sussiste nel mondo, cioe' lo stato delle cose del mondo verifica la proprieta' A

Es. Se A ="Socrate e' un uomo" allora

$I(A)=V$ in tutti i *mondi* in cui vive un uomo di nome Socrate

Semantica dei connettivi logici

I connettivi logici si comportano in modo stabile rispetto ai valori di verita' V ed F .

Per definire $I(P \wedge Q) = I(P) \wedge I(Q)$ dobbiamo definire l'operatore $\wedge$ come funzione tra $\{V, F\}^2$ e se stesso, cioe'

$$\wedge : \{V, F\} \times \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}$$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>
<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>False</i>
<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>False</i>
<i>True</i>	<i>True</i>	<i>False</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>	<i>True</i>

Logica Proposizionale

SEMANTICA

Lo scopo del nostro calcolo

$$S \models C$$

Assumere Vere le FBF in S e verificare
che una (nuova) FBF C sia Vera

Esempio

$$\emptyset \models A \vee \neg A$$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
V	F	V
F	V	V

Esempio

$$\emptyset \models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

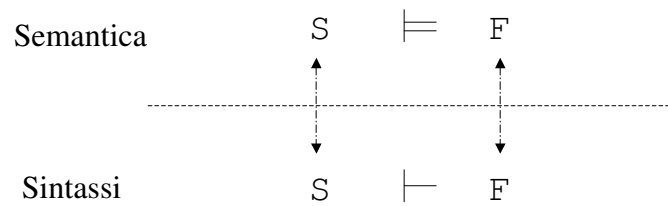
Esercizio: Provare a costruire la tabella di verità degli altri assiomi.

Tautologie e modelli

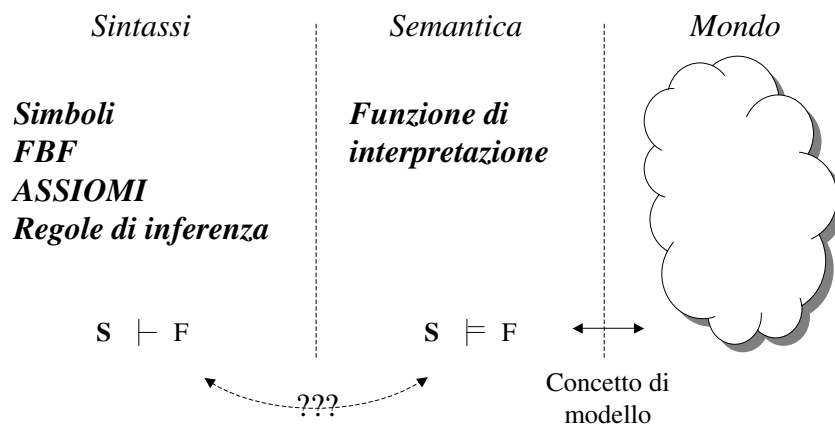
- Una FBF sempre vera indipendentemente dal valore dei **letterali** viene detta
tautologia
- Un modello di un insieme F di FBF è una particolare **interpretazione I** che rende vere tutte le formule in F

Osservazione

- Chi garantisce?



Logica proposizionale *Sintassi vs Semantica*



Sintassi vs Semantica

Osservazioni

Una dimostrazione per

$$S \vdash F$$

è una sequenza

$$DIM = P_1, P_2, \dots, P_n$$

- $P_n = F$
- $P_i \in S$
- $P_i \in \text{ASSIOMI}$
- P_i è ottenibile da $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ (con $i_1 < i, \dots, i_m < i$) applicando una **regola di inferenza**

Sintassi vs Semantica

Osservazioni

$$DIM = P_1, P_2, \dots, P_n$$

Problema: introduciamo sempre formule vere?

- $P_i \in S$ vere per ipotesi
- $P_i \in \text{ASSIOMI}$ veri poiché tautologie
- P_i è ottenibile da $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ (con $i_1 < i, \dots, i_m < i$) applicando una **regola di inferenza**

anello debole

Sintassi vs Semantica

Regole di inferenza e veridicit 

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \quad \mathbf{AI}$$

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}{A_i} \quad \mathbf{AE}$$

$$\frac{P \Rightarrow B, P}{B} \quad \mathbf{MP}$$

A	B	A ⇒ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sintassi vs Semantica

- La preservazione della veridicit    osservabile per induzione
- Formalmente:
 - (Meta)Teorema di completezza
 - (Meta)Teorema di Deduzione (+ Ogni teorema di L   una tautologia)

Conoscenze ed Eurismi

- Ragionamento si basa:
 - un insieme di conoscenze (od osservazioni)
 - un insieme di regole apprese detti “eurismi”
- Eurisma** = qualunque regola mentale atta a generare o trovare qualcosa che si stà cercando

Esempi

“Uscire con l’ombrello quando è nuvolo”

“Colpire la palla da tennis nel punto più alto della parabola di rimbalzo”

“Far percepire al cliente che ha sempre ragione”

“Se il capo vuole avere ragione è meglio accordargliela”

Logica proposizionale (limiti)

Socrate è un uomo.

Gli uomini sono mortali. (A)

Allora Socrate è mortale.

Traduzione di (A) nella logica proposizionale

Se Gino è un uomo, allora Gino è mortale.

Se Pino è un uomo, allora Pino è mortale.

Se Rino è un uomo, allora Rino è mortale.

Se Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale.

...

<i>Se X è un uomo, allora X è mortale.</i>
--

Logica del primo ordine

Sintassi

Ingredienti:

Simboli **L**

– **Letterali**

- Costanti individuali A_i
- Variabili individuali α_i
- Lettere funzionali f_i
- Lettere predicative P_i

– **Connettivi Logici:** $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, (,)\} \cup \{\exists, \forall\}$

Logica del primo ordine

Sintassi

Ingredienti:

Formule Ben Formate (FBF)

– Le Formule Atomiche sono FBF

– Se f_1 e $f_2 \in \text{FBF}$ e x è una variabile individuale allora

$\exists x.f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \wedge f_2 \in \text{FBF}$
$\forall x.f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \vee f_2 \in \text{FBF}$
$\neg f_1 \in \text{FBF}$	$f_1 \Rightarrow f_2 \in \text{FBF}$

Logica del primo ordine

Sintassi

Ingredienti:

Termine T

costanti individuali $\in T$

variabili individuali $\in T$

Se $t_1, \dots, t_n \in T$ allora

$f_i(t_1, \dots, t_n) \in T$

Formule Atomiche

Se $t_1, \dots, t_n \in T$ allora

$P_i(t_1, \dots, t_n)$ è una **formula atomica**

Esempio

- Sono formule ben formate (FBF) le seguenti

- `padre_di(luigi, mario)`
- $\forall X \text{ vinopregiato}(X) \wedge \text{ama}(\text{luigi}, X)$
"luigi ama tutti i vini pregiati"
- $\exists X \text{ padre_di}(\text{luigi}, \text{capoufficio}(\text{mario})) \wedge$
 $\text{ama}(\text{luigi}, X) \wedge \text{donna}(X)$
"Luigi e' il padre del capoufficio di Mario e ama una donna"

dove

- `luigi`, `mario` sono costanti individuali
- `capoufficio()` e' una funzione di arità 1
- `ama()`, `padre_i()`, `vinopregiato()` sono predicati

Logica del primo ordine

Sintassi

Ingredienti:

Regole di inferenza

- Eliminazione del quantificatore universale

$$\frac{\forall x.F(\dots x\dots)}{\text{SUBST}(\{x/a\}, F(\dots x\dots))}$$

- Eliminazione del quantificatore esistenziale

$$\frac{\exists x.F(\dots x\dots)}{\text{SUBST}(\{x/a\}, F(\dots x\dots))}$$

Dove **a** non appartiene a costanti già introdotte

- Introduzione del quantificatore esistenziale

$$\frac{F(\dots a\dots)}{\exists x.F(\dots x\dots)}$$

Logica del primo ordine

Semantica

Interpretazione

- *Insieme D*

$$I(a_i) = d_i \quad \text{per ciascuna costante individuali}$$

- *Insieme di funzioni*

$$I(f_i) = f_i$$

$$f_i: D^n \rightarrow D \quad \text{per ciascuna lettera funzionale } f_i$$

- *Insieme di relazioni*

$$I(P_i) = \mathcal{P}_i$$

$$\mathcal{P}_i \subseteq D^n \quad \text{per ciascuna lettera predicativa } P_i$$

Logica del primo ordine

Semantica

Interpretazione

- Interpretazione delle **formule atomiche**
 - $I(P_i(a_1, \dots, a_n)) = V$ se $(I(a_1), \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti
 - $I(\forall x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$
se per tutti gli $x \in d$ accade che
 $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti

Logica del primo ordine

Semantica

Interpretazione

- Interpretazione delle **formule quantificate**
 - $I(\forall x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$ se per tutti gli $x \in D$ accade
che $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti
 - $I(\exists x. P_i(a_1, \dots, x, \dots, a_n)) = V$ se esiste $x \in D$ tale che
 $(I(a_1), \dots, x, \dots, I(a_n)) \in I(P_i)$
 $= F$ altrimenti

Logica proposizionale vs. Logica del primo ordine

“Aggiunte”:

- Strutturazione dei letterali
- Introduzione delle variabili
- Introduzione dei quantificatori

Logica del primo ordine

Socrate è un uomo.

Gli uomini sono mortali.

Allora Socrate è mortale.

- Costanti individuali
 $\{\text{Socrate, Pino, Gino, Rino}\}$
- Lettere predicative
 $\{\text{Uomo, Mortale}\}$

Logica del primo ordine

Socrate è un uomo.

Gli uomini sono mortali.

Allora Socrate è mortale.

- Traduzione affermazioni
 $\text{Uomo}(\text{Socrate})$
 $\forall x. (\text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x))$
- Traduzione goal
 $\text{Mortale}(\text{Socrate})$

Inferenza nella Logica del primo ordine

$\forall x. (\text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x))$ **Universal Elimination**

$(\text{SUBST}(\{x/\text{Socrate}\}, \text{Uomo}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x)))$

$\text{Uomo}(\text{Socrate}) \Rightarrow \text{Mortale}(\text{Socrate}), \text{Uomo}(\text{Socrate})$ **MP**

$\text{Mortale}(\text{Socrate})$