

Esercitazioni

(a cura di R. Basili)

E1. Elementi di Algebra

Insiemi

- Nozione intuitiva di insieme
- L'insieme vuoto
- Operazioni tra insiemi
- Domini
- Prodotto Cartesiano
- Proprieta' delle operazioni tra insiemi

Relazioni

- Il concetto di relazioni
- Proprieta' di una relazione
- Relazioni di equivalenza (esempi: rette e punti del piano, classi dei resti modulo M)
- Relazioni di ordine (esempi: numeri relativi, reticoli, alberi)

Funzioni

- La nozione di funzione
- Dominio, Codominio.
- Le operazioni in un insieme come funzioni

E2. Elementi di Logica

Calcolo delle Proposizioni (CP)

- Il linguaggio del CP come formalismo per la rappresentazione di informazione
- Sintassi del CP
- Semantica di espressioni del CP
- Tabelle di Verita'
- Proprieta' del CP
- Modelli logici di mondi concreti (es. circuiti, linguaggio naturale e logica)
- Forme Normali del CP

Elementi di Algebra di Boole

E3. Macchine di Turing (MdT)

Descrizione modellistica di una MdT

Formalizzazione algebrica di una MdT

Computazione di una MdT come successione di descrizioni istantanee

Esercizi risolti:

- MdT per il calcolo del successivo di un numero decimale
- MdT per il calcolo (decimale) delle occorrenze di un simbolo in una stringa
- MdT per la complementazione di una stringa binaria
- MdT per il calcolo del (pari o dispari) successivo di una stringa decimale
- MdT che "trova" i suoi dati nel nastro

E1. Elementi di Algebra

E1.1 Insiemi

DEF: Un insieme e' una collezione di individui, detti elementi o membri dell'insieme. L'insieme degli individui dell'insieme e' generalmente caratterizzato da proprieta' che stabiliscono condizioni (necessarie e sufficienti) di appartenenza all'insieme.

Un insieme generalmente viene denotato mediante l'uso di parentesi graffe ($\{ \}$), cosi' che

$$A = \{a, b, c\}$$

e' l'insieme i cui individui sono a , b e c .

Esempi

1. I sia l'insieme degli italiani., cioe' l'insieme degli individui che posseggono la cittadinanza italiana. La cittadinanza e' condizione necessaria e sufficiente per la appartenenza.
2. N sia l'insieme dei numeri interi.
3. D sia l'insieme dei numeri interi positivi dispari ovvero
$$D = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$$
4. Q sia l'insieme dei numeri razionali.
5. W sia l'insieme delle capitali europee, ovvero
$$W = \{ \text{parigi, bonn, londra, roma, bruxelles, ...} \}$$
6. V sia l'insieme dei resti della divisione intera per 2, ovvero
$$V = \{0, 1\}$$

Quando condizioni necessarie e sufficienti non sono disponibili allora si ricorre alla definizione di un insieme per esaustione, cioe' mediante la dichiarazione diretta di ogni individuo entro parentesi graffe (vedi es. 6).

La *appartenenza* di un individuo x ad un insieme A si denota secondo la seguente espressione

$$x \in A$$

che indica quindi " x appartiene ad A ". La stessa notazione e' utilizzata per la frase " A contiene x " che risulta quindi:

$$A \ni x \quad (\text{ovvero } x \in A)$$

E' utile talvolta esprimere il fatto che un elemento x NON appartiene ad un insieme A . Tale informazione e' quindi espressa mediante la seguente espressione:

$$x \notin A \quad (x \text{ non appartiene ad } A)$$

DEF (*Uguaglianza tra insiemi*) Due insiemi A e B si dicono *uguali* se tutti gli elementi di A sono anche membri di B e viceversa. Formalmente:

$$A=B \quad \text{se e solo se} \quad \begin{array}{l} \text{per qualsiasi } x \in A \text{ vale anche } x \in B \\ \text{e pure per qualsiasi } x \in B \text{ vale anche } x \in A \end{array}$$

La definizione di sopra e' generalmente espressa in forma piu' sintetica

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{E} \quad \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

con ovvia interpretazione.

Esempi.

Nessuna coppia di insiemi scelti tra gli esempi 1.-6. denota insiemi uguali.

Sia:

7. A l'insieme dei multipli (positivi) di 2 ovvero
 $A = \{ 2n \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ numeri naturali} \}$

8. B l'insieme dei numeri pari

Per 7. e 8. segue che $A = B$.

OSS: Dalla definizione di uguaglianza tra insiemi discende che, nella notazione esaustiva di insieme, l'ordine con cui gli elementi sono enumerati non fornisce alcuna informazione. Infatti, dati

$$A=\{1,2,3\}, \quad B=\{2,3,1\} \text{ e } C=\{1,3,2\}$$

segue che $A=B=C$, cioe' essi sono lo STESSO insieme.

Questa proprieta' caratterizza profondamente la nozione di insieme in quanto semplice aggregato di individui (es. 1,2,3) senza alcuna struttura interna (per es. ordine).

Puo' accadere che un insieme e' membro di un altro insieme.

9. Sia $C = \{ \mathbb{N}, \mathbb{Q} \}$ ovvero l'insieme formato dai due insiemi $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (vedi 2.) e $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali (vedi 4.). Osserviamo che valgono le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \in C, \mathbb{Q} \in C \text{ e pure } C \ni \mathbb{N}, C \ni \mathbb{Q} \\ 1 \in \mathbb{N}, 1 \in \mathbb{Q}, 1.2 \in \mathbb{Q} \end{array}$$

ma non valgono

$$\begin{array}{ll} 1.2 \in \mathbb{N} & 1.2 \text{ non e' un numero naturale} \\ 1 \in C & \text{nessun elemento di } C \text{ e' } 1 \text{ nella definizione 8.} \\ 1.2 \in C & \text{"} \end{array}$$

Poiche' un insieme puo' appartenere ad un altro insieme e' necessario osservare la distinzione tra le seguenti espressioni:

$$10. \quad A = \{1\}$$

$$11. \quad B = \{ \{1\} \}$$

In 10., 11. si ha che:

1 e' un individuo

A e' l'insieme formato dall'individuo 1

B e' l'insieme il cui unico elemento e' l'insieme A.

Dagli esempi 2., 4., o 6. 7. si puo' osservare che alcuni insiemi sono "piu' grandi" di altri: 4. ci appare piu' grande di 2. in quanto contiene tutti gli elementi di 2. piu' alcuni altri. A tale proposito si puo' introdurre la nozione di inclusione tra insiemi.

DEF (*Inclusione tra insiemi*). Dati due insiemi A e B, si dice che A e' *incluso in* B se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B, ovvero

$$i) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Se esiste almeno un individuo y in B che non appartiene ad A allora l'inclusione tra A e B si dice *inclusione stretta* ed e' definita da:

$$ii) \quad A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ ed esiste } y \in B \text{ tale che } y \notin A)$$

o piu' sinteticamente

$$ii)' \quad A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ ed } \exists y \in B \mid y \notin A)$$

con ovvia corrispondenza tra esiste e il simbolo ' $\exists$ ' e tra "tale che" e il simbolo ' $\mid$ '.

DEF (*Sottoinsiemi*). Se i) vale tra gli insiemi A e B allora A si dice *sottoinsieme* di B. Se ii) o ii)' sono vere ed A contiene almeno un elemento allora A si dice *sottoinsieme proprio* di B. A volte la nozione di sottoinsieme si denota con il simbolo s.i. e si dira'

A e' un s.i. di B.

Esempi.

Siano N, D, Q gli insiemi definiti rispettivamente in 2., 3. e 4.. Valgono le seguenti espressioni.

$$N \subseteq Q \quad N \text{ e' s.i. di } Q$$

$$D \subseteq N \quad D \text{ e' s.i. di } N$$

$$N \subset Q \text{ ed } D \subset N.$$

Osserviamo che da $N \subseteq Q$ e $D \subseteq N$ segue anche che:

$$D \subseteq N$$

Tali espressioni possono apparire collettivamente in una espressione nel seguente modo:

$$D \subseteq N \subseteq Q$$

Da tali espressioni si evince subito che Q e' "piu' grande di D o al massimo uguale"

Siano A e B definiti come in 6. e 7.. Osserviamo che per A e B valgono le seguenti espressioni:

$$A \subseteq B$$

$$B \subseteq A$$

ma NON valgono

$$A \subset B$$

$$B \subset A$$

Da questo esempio deriva un modo ulteriore per definire l'uguaglianza tra due insiemi.

DEF' (*Uguaglianza tra insiemi*). Due insiemi A e B sono *uguali* se vale contemporaneamente:

$$A \subseteq B$$

$$B \subseteq A$$

DEF (*Insieme vuoto*). Un insieme che non contiene alcun elemento e' *vuoto*, ed e' denotato con il simbolo $\emptyset$.

Un insieme vuoto e' generato da condizioni di appartenenza non soddisfatte da alcun individuo.

Esempio.

Sia V l'insieme dei cittadini di Atlantide. V e' vuoto.

Sia V l'insieme dei numeri pari divisibili per 3. V e' vuoto.

Osserviamo che diverse definizioni possono essere fornite per (un) insieme vuoto ma che esso risulta *unico*. Infatti dalla definizione risulta il seguente:

TEOREMA (*Unicit  dell'insieme vuoto*). L'insieme vuoto e' *unico*.

DIM (per assurdo). Ammettendo che $\emptyset$ e $\emptyset'$ siano due insiemi vuoti diversi. Segue dalla definizione di inclusione che:

$$i) \emptyset \subseteq \emptyset'$$

Infatti ogni elemento di $\emptyset$ e' anche in $\emptyset'$;

ma anche

$$ii) \emptyset' \subseteq \emptyset$$

poiche' ogni elemento di $\emptyset'$ e' anche in $\emptyset$.

Da i) e ii) segue che $\emptyset = \emptyset'$ e cioe' l'unicita'.

DEF (*Insieme delle parti*). Dato un qualsiasi insieme (non vuoto) A, l'insieme dato dai sottoinsiemi di A e' detto insieme delle parti, ed e' denotato con 2^A .

Esempio:

12. Sia $A = \{2, 3, 8\}$ allora $2^A = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{8\}, \{2, 3\}, \{2, 8\}, \{3, 8\}, \{2, 3, 8\}\}$

DEF (*Cardinalita' di un insieme*). Dato un insieme finito A, il numero di elementi in A e' detto *cardinalita' dell'insieme A* ed e' denotato dal seguente simbolo $|A|$.

Esempi. La cardinalita' $|A|$ dell'insieme A dell'esempio 12. e' 3.

La cardinalita' $|2^A|$ dell'insieme delle parti di A e' 8.

OSS: Dato un insieme finito A, la cardinalità di 2^A è sempre pari a $2^{|A|}$. Dimostrare questa proprietà per esercizio.

A questo punto vale la pena osservare la differenza non elementare tra i simboli: $\subseteq$, $=$, $\in$.

Siano N, Q, e C gli insiemi dell'esempio 9. Osserviamo che sono corrette le seguenti espressioni

$$N \in C, \quad Q \in C, \quad N \subseteq Q$$

ma non è vero che

$$N \subseteq C \text{ o } Q \subseteq C.$$

Infatti 1 o 1.2 NON SONO ELEMENTI di C.

Analogamente $N=C$ non è vero, poiché gli elementi dei due insiemi non coincidono.

Spesso nel linguaggio naturale alcune espressioni (verbali) indicano equivalentemente appartenenza, uguaglianza e inclusione, come in

Bill Clinton è il presidente degli Stati Uniti (uguaglianza)

Bill Clinton è un uomo (appartenenza all'insieme degli uomini)

I presidenti sono uomini (inclusione)

E1.2 Operazioni tra Insiemi

Dati due insiemi è possibile costruire ulteriori insiemi mediante l'uso di alcune operazioni.

DEF (*Unione*). Dati due insiemi A e B si dice *unione di A e B* l'insieme $A \cup B$ definito da:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

DEF (*Intersezione*). Dati due insiemi A e B si dice *intersezione tra A e B* l'insieme $A \cap B$ definito da:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e contemporaneamente } x \in B\}$$

DEF (*Complementazione*). Dati A e B si dice *complemento di A in B* l'insieme $A \setminus B$ definito da:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e contemporaneamente } x \notin B\}$$

Esempi:

Dati $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 0, -1, 1\}$

Allora:

$$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad (\text{senza ripetizioni!})$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus B = \{3, 4\}$$

Unione o intersezione hanno un ruolo fondamentale nella descrizione di alcune espressioni ambigue della lingua, come ad es.

Alcuni italiani (I) sono bevitori (B)

Gli italiani bevitori sono artisti (A)

che possono essere espresse senza ambiguità' rispettivamente come:

$$I \cap B \neq \emptyset \quad (\text{e NON } B \subseteq I)$$

$$I \cap B \subseteq A \quad (\text{cioe' } (I \cap B) \subseteq A)$$

Esercizio proposto:

Esprimere mediante le notazioni di appartenenza inclusione e uguaglianza le seguenti frasi:

Sia I l'insieme degli italiani, ed A l'insieme degli artisti

Tutti gli italiani sono artisti

Gli italiani sono artisti

Sia C l'insieme dei cani, F l'insieme degli animali fedeli e N l'insieme degli enti di colore nero.

Il cane e' nero.

Il cane e' fedele.

Il cane e' un animale fedele.

Sia G l'insieme delle persone, I l'insieme degli italiani, E l'insieme degli evasori,

T l'insieme dei bevitori di tea, B i bevitori di birra, V i bevitori di vino, C i bevitori di caffè'.

Alcuni bevitori di caffè' italiani sono evasori

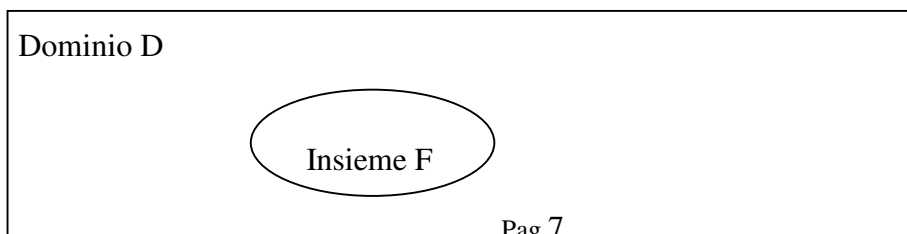
Nessun italiano e un evasore

Tutti i bevitori di birra bevono vino o tea.

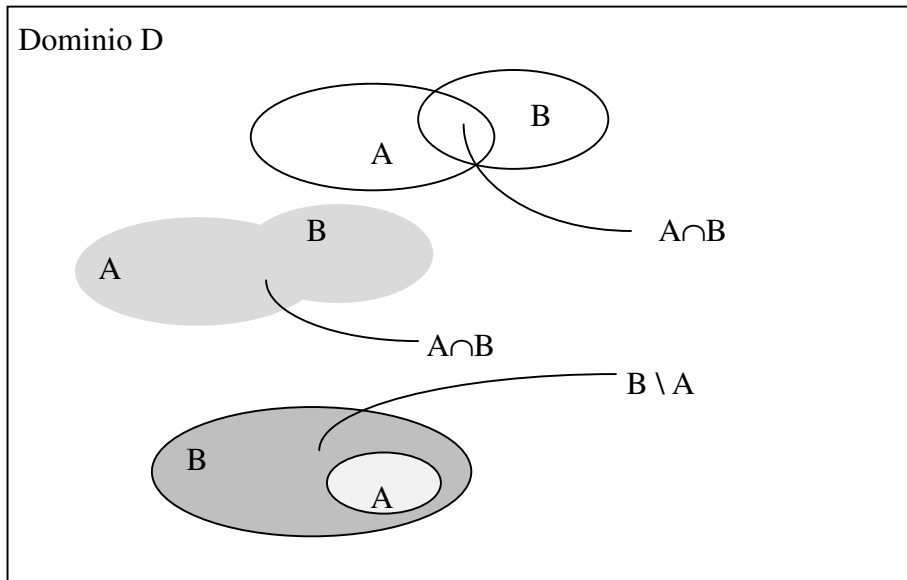
Domini

In generale la nozione di insieme presuppone l'esistenza di individui di cui caratterizzare l'appartenenza. Tali collezioni di individui vengono detti *domini* (o *supporti*) dell'insieme. La nozione di insieme in un dominio equivale a stabilire una collezione di quegli individui di un dominio che verificano certe proprietà'.

Ad esempio nell'aula di Fondamenti di Informatica 1 ci sono gli individui del dominio degli studenti (S) che seguono il Corso di Fondamenti di Informatica 1 (F). Graficamente la relazione tra un insieme ed un dominio viene rappresentata nel seguente modo:



In un dominio D sono quindi rappresentabili anche le nozioni di unione, intersezione e complemento come segue:



Una volta stabilito senza ambiguità il dominio D di un insieme A allora si può parlare semplicemente del complemento $C(A)$ di A .

DEF (*Complemento*). In dominio D , il *complemento di un insieme A* , espresso come $C(A)$, è l'insieme degli individui di D che non sono in A , e formalmente

$$C(A) = \{ x \in D \mid x \notin A \}$$

Esempio

Sia D (dominio) l'insieme dei numeri interi non nulli, ed P e D rispettivamente i numeri pari e dispari di D . Allora segue che:

$$C(P) = D$$

$$C(D) = P$$

Osserviamo anche che dalla definizione di complemento (in D) di un insieme A seguono:

$$C(A) \cap A = \emptyset$$

$$C(A) \cup A = D$$

Le definizioni fin qui adottate giustificano le seguenti proprietà notevoli degli insiemi (e delle loro operazioni):

- P1. $C(A) \cap A \cup \emptyset = A$ ($\emptyset$ e' elemento neutro rispetto all'unione)
P2. $A \cap D = A$ (D e' l'elemento neutro rispetto alla intersezione)
 $C(A) \cup A = D$
P3. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (Commutativita')
P4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
P5. $A \cup C(A) = D$
 $A \cap C(A) = \emptyset$
P6. $\emptyset \neq D$
P8. $C(C(A)) = A$
(leggi di De Morgan)
P9. $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$
P10. $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$

Dimostriamo per esercizio la P9:

Dimostrare P9 significa dimostrare le due proprieta'

$$C(A \cup B) \subseteq C(A) \cap C(B) \quad \text{e} \quad C(A) \cap C(B) \subseteq C(A \cup B)$$

(Dim. $C(A \cup B) \subseteq C(A) \cap C(B)$):

Poiche' $\forall x \in C(A \cup B)$ segue che $x \notin (A \cup B)$ e cioe' $x \notin A$ e pure $x \notin B$. Quindi $x \in C(A)$ e anche $x \in C(B)$. Ma cio equivale a dire che $x \in C(A) \cap C(B)$.

(Dim. $C(A) \cap C(B) \subseteq C(A \cup B)$):

Poiche' $\forall x \in C(A) \cap C(B)$ segue che $x \notin A$ e contemporaneamente $x \notin B$. Cio' significa negare che x possa essere elemento di A o di B , cioe' $x \notin A \cup B$. Ma allora $x \in C(A \cup B)$.
QED.

Esercizi Proposti:

1. Date le seguenti coppie di insiemi A e B

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $A = \{1, \{1\}, j\}$ | $B = \{1, \{1\}, j, b\}$ |
| (2) | $A = \{n \text{ numeri relativi} \mid n > 0\}$ | $B = \{n \text{ numeri relativi non nulli}\}$ |
| (3) | $A = \{5, \{j\}, \{\{1\}\}\}$ | $B = \{5, j, \{\{j\}\}, 1\}$ |

dire quali tra le seguenti asserzioni risultano vere

$$A \in B$$

$$A = B$$

$$A \subseteq B$$

2. Dati

$$A = \{2n \mid n \text{ sono i numeri naturali}\}$$

$$B = \{n \text{ naturali} \mid n > 10\}$$

descrivere:

$$A \cup B$$

$$A \cap B$$

$$A \setminus B$$

$$B \setminus A$$

3. Diagrammare $A \cup B$ nel caso in cui esiste un C tale che $A \cap C \neq \emptyset$ e pure $B \cap C \neq \emptyset$.
4. Dimostrare per esercizio la P10.

E1.3 Prodotto Cartesiano tra Insiemi

Dati due insiemi A e B , si dice *prodotto cartesiano* $A \times B$ tra i due insiemi l'insieme formato da coppie $\langle a, b \rangle$ di elementi prelevati ordinatamente dai due insiemi in modo che i primi (cioè a) siano elementi di A , ed i secondi (cioè b) rispettivamente di B . Più precisamente (notando con $\langle a, b \rangle$ la coppia ordinata di due individui)

DEF (*Prodotto Cartesiano*). Dati due insiemi A e B , si dice *prodotto cartesiano di A e B* , e si denota come $A \times B$, il seguente insieme:

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

Si noti che $A \times B$ contiene tutte le possibili coppie $\langle a, b \rangle$ perché nessun vincolo è definito per la scelta di a in A e b in B .

Esempi:

Sia $A = \{1, 3, 6, 7\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$
 allora $A \times B = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 5 \rangle, \langle 7, 3 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 5 \rangle \}$

Sia $D = \{a, b, c\}$ e $E = D$, allora

$$D \times E = D \times D = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$$

Un tale insieme è spesso espresso (in analogia con il prodotto aritmetico) D^2 .

Osserviamo la cruciale differenza tra le espressioni
 $\{a, b\}$ e $\langle a, b \rangle$

Mentre per la prima infatti vale anche

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

per la seconda

$$\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$$

essendo in $\langle a, b \rangle$ gli individui a e b derivati da insiemi DIVERSI.

Infatti mentre $\langle a, b \rangle \in A \times B$ si ha in generale che $\langle b, a \rangle \notin A \times B$ (poiché $A \neq B$).

Osserviamo che la definizione di prodotto cartesiano può essere estesa anche a più insiemi: Siano A_1, A_2, A_3 tre insiemi e sia $A_1 \times A_2$ il prodotto cartesiano dei primi due.

Allora si può considerare $(A_1 \times A_2) \times A_3$ che è il prodotto cartesiano tra un insieme (di coppie) ed il terzo insieme A_3 . Dalla definizione di prodotto cartesiano segue che:

$$(A_1 \times A_2) \times A_3 = \{ \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \mid \langle a_1, a_2 \rangle \in A_1 \times A_2, a_3 \in A_3 \}$$

Per la genericità degli elementi di $A_1 \times A_2$ e A_3 nella definizione di prodotto cartesiano segue che un elemento di $(A_1 \times A_2) \times A_3$ è un tripla $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ generica in cui sistematicamente primo, secondo e terzo sono rispettivamente elementi (generici) di A_1 , A_2 e A_3 . Ne segue che è possibile considerare senza ambiguità la seguente identità:

$$\langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad \text{per ogni } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3$$

Allora definendo $A_1 \times A_2 \times A_3$ come l'insieme delle triple $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ definiamo tale insieme come il prodotto cartesiano tra i tre insiemi A_1 , A_2 ed A_3 .

Generalizzando, il prodotto cartesiano tra n insiemi $A_1, \dots, A_n$ è dato da:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i \quad i=1, 2, \dots, n \}$$

Gli elementi di $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ sono dette in generale n -plu (ennuple) di elementi in $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

Osserviamo ancora la differenza tra $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ e $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ cioè tra insiemi (nessun ordinamento nella loro espressione) ed ennuple di elementi.

Esempio: Sia R l'insieme dei numeri reali. Lo spazio euclideo tridimensionale è il prodotto cartesiano $R \times R \times R$ ($\text{o } R^3$) = $\{ \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \mid x_i \in R \}$

E1.4 Relazioni tra insiemi

DEF (*Relazione tra due insiemi*). Dati due insiemi A e B si dice *relazione* σ tra A e B una corrispondenza tra elementi $a \in A$ e $b \in B$, e si dice che:

a è in relazione con b (o sinteticamente $a \sigma b$)

se la coppia $\langle a, b \rangle$ soddisfa a tale corrispondenza.

Una relazione definisce un insieme di coppie $\langle a, b \rangle$ che sono elementi del prodotto cartesiano $A \times B$.

Una relazione quindi viene completamente definita quando si stabilisce l'insieme di coppie dell'insieme $A \times B$ che la soddisfano. Una analoga definizione di relazione è quindi:

DEF (*Relazione tra due insiemi*). Dati due insiemi A e B si dice *relazione* σ tra A e B un qualsiasi sottoinsieme σ del prodotto cartesiano $A \times B$, con $\sigma \subseteq A \times B$.

Esempio

(0)

Sia $A = \{6, 4, 2\}$ e $B = \{2, 3, 7, 8\}$ e sia σ la relazione “*divisore intero di*”. Si dice che un qualsiasi $a \in A$ è in relazione σ con $b \in B$ se a è un divisore di b . Le coppie che esprimono tale relazione sono quindi:

$$\{ \langle 2,2 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 4,8 \rangle \}$$

L'insieme che rimane conseguentemente definito e' quindi

$$\sigma = \{ \langle 2,2 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 4,8 \rangle \}$$

e' un sottoinsieme (proprio) del prodotto cartesiano $A \times B$.

Osserviamo come, pur essendo 3 o 2 ($\in B$) divisori intero di 6 ($\in A$), le coppie $\langle 3,6 \rangle$ e $\langle 2,6 \rangle$ non compaiono in σ poiche' la relazione e' intesa tra A e B e non viceversa.

DEF (*Relazione tra n insiemi*). Si dice relazione σ tra n insiemi $A_1, \dots, A_n$, un sottoinsieme σ qualsiasi del prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Esempio.

(1) Sia R^3 lo spazio euclideo tridimensionale. Sia σ l'insieme dei punti della superficie sferica di raggio unitario, cioe'

$$\sigma = \{ \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$

σ e' una relazione (non vuota) in R^3 .

Infatti $\langle 0,0,1 \rangle$ o $\langle 1,0,0 \rangle$ sono elementi di σ .

(2) Viceversa sia σ' definita in R^3 , da:

$$\sigma' = \{ \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \}$$

Ancora, σ' e' una relazione in R^3 , che risulta vuota.

(3) Sia R^2 lo spazio euclideo bidimensionale. Sia σ in $R^2 \times R^2$ la relazione di "equidistante dal centro $O = \langle 0,0 \rangle$ ".

$$\sigma = \{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in R^2 \times R^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \}$$

σ e' una relazione (non vuota) in $R^2 \times R^2$.

Infatti $\langle \langle 1,1 \rangle, \langle -1,1 \rangle \rangle$ o $\langle \langle 3,0 \rangle, \langle 0,3 \rangle \rangle$ sono elementi di σ , poiche' distano rispettivamente 2, e 3 dall'origine $O = \langle 0,0 \rangle$.

(4) Sia R l'insieme delle rette di un piano. Sia σ in $R \times R$ la relazione di parallelismo. Segue che

$$\sigma = \{ \langle r, r' \rangle \in R \times R \mid r \text{ e' parallela ad } r' \}$$

σ e' una relazione non vuota nell'insieme delle coppie di rette del piano, $R \times R$.

Infatti

$$r: \quad x+y-2=0$$

$$r': \quad -2x-2y=0$$

essendo tra loro parallele, determinano una coppia $\langle r, r' \rangle \in \sigma$.

Proprieta' delle Relazioni

Riflessivita'

DEF (*Riflessivita'*). Una relazione σ in $A \times A$ si dice *riflessiva*, se vale:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \sigma a \text{ cioe' } \langle a, a \rangle \in \sigma$$

Esempi.

Le relazioni (3) e (4) nell'esempio precedente sono riflessive.

- (5) Dato $A=\{2,3,6\}$ e sia σ in $A \times A$ la relazione di “*divisore intero di*” allora σ è riflessiva.
- (6) Dato R come l'insieme dei numeri reali, e la relazione σ in $R \times R$ di $<$, allora σ è non riflessiva poiché
- $$\forall x \in R \Rightarrow x = x \text{ e non } x < x$$
- (7) Dato R come l'insieme dei numeri reali, e la relazione σ in $R \times R$ di $\leq$, allora σ è riflessiva poiché
- $$\forall x \in R \Rightarrow x \leq x$$

Simmetria

DEF (*Simmetria*). Una relazione σ in $A \times A$ si dice *simmetrica* se

$$\forall \langle a, b \rangle \in A \times A \Rightarrow \langle b, a \rangle \in A \times A$$

Esempi:

Le relazioni (3) e (4) degli esempi precedenti sono simmetriche. Le relazioni (5) e (6) non lo sono.

Antisimmetria

DEF (*Antisimmetria*). Una relazione σ in $A \times A$ si dice *antisimmetrica* se

$$\forall \langle a, b \rangle \in A \times A \text{ tale che anche } \langle b, a \rangle \in A \times A \Rightarrow b = a$$

Esempi.

Le relazioni (3) e (4) in quanto simmetriche non sono antisimmetriche.

Le relazioni (5) e (7) sono antisimmetriche.

La relazione (6) non è simmetrica né antisimmetrica.

Transitività

DEF (*Transitività*). Una relazione σ in $A \times A$ si dice *transitiva* se:

$$\forall a, b, c \in A \quad \langle a, b \rangle \in A \times A \text{ e } \langle b, c \rangle \in A \times A \Rightarrow \langle a, c \rangle \in A \times A$$

Esempi.

Le relazioni (3), (4), (5), (6) e (7) sono tutte transitive.

- (8) Sia I l'insieme dei numeri interi (o naturali). Sia k un intero fissato. Sia σ_k in $I \times I$ definita come
- $$\sigma_k = \{ \langle n, m \rangle \in I \times I \mid \text{il resto della divisione di } m \text{ ed } n \text{ per } k \text{ è lo stesso} \}$$

La relazione così definita è riflessiva (n da' SEMPRE lo stesso resto se diviso per k), simmetrica (se il resto è lo stesso non importa l'ordine con cui n ed m vengono considerati nella definizione) e transitiva (coppie qualsiasi di tre numeri, che danno lo stesso resto se divisi per k, appartengono sempre alla relazione).

(9)

Sia I un certo insieme. Sia S l'insieme delle parti di I, cioè l'insieme dei suoi sottoinsiemi. Sia la relazione σ in $S \times S$ di inclusione $\subseteq$ tra sottoinsiemi. σ è una relazione transitiva in $S \times S$.

E1.5 Relazioni d'ordine

DEF (Relazione d'ordine) Una relazione σ in $A \times A$ è *d'ordine* se essa è *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*.

Esempi.

Le relazioni (5), (7) e (9) sono relazioni d'ordine.

DEF (Relazione di ordine totale). Una relazione σ in $A \times A$ è di *ordine totale* se σ è una relazione d'ordine in $A \times A$, e

$$\forall a, b \in A \text{ vale } \langle a, b \rangle \in \sigma \text{ oppure } \langle b, a \rangle \in \sigma$$

Esempi:

(7) è una relazione di ordine totale.

(9) non è una relazione d'ordine totale.

Infatti sia $I = \{1, 2, 3\}$ da cui

$$S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Allora dati:

$$\{1, 2\} \text{ e } \{2, 3\}$$

non è vero che $\{1, 2\} \subseteq \{2, 3\}$ e nemmeno che $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$.

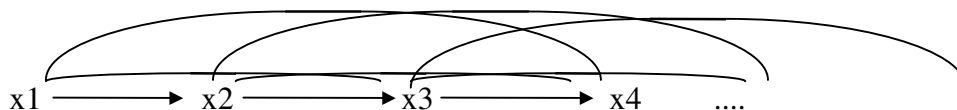
Per analoghi motivi (5) non è d'ordine totale.

DEF (Ordine parziale) Una relazione d'ordine che non è d'ordine totale è una relazione *d'ordine parziale*.

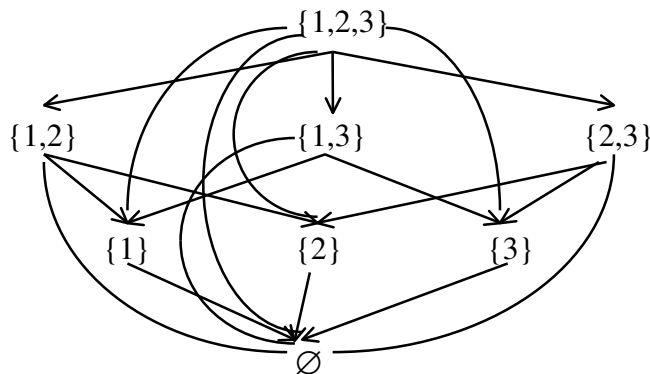
Esempi:

(5) e (9) sono relazioni d'ordine parziale.

È interessante osservare che relazioni d'ordine totale esprimono un ordinamento lineare tra gli elementi di A.



Le relazioni d'ordine parziale invece stabiliscono ordinamenti non lineari in A. Nell'esempio (9) infatti si ha la seguente rappresentazione grafica dell'ordinamento.



E1.6 Relazioni d'equivalenza

DEF (*Relazione d'equivalenza*). Una relazione σ in $A \times A$ è d'equivalenza se σ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempi.

Le relazioni (3), (4) e (8) sono relazioni d'equivalenza.

- (10) Sia S un insieme qualsiasi e 2^S l'insieme delle parti di S . Sia σ in $2^S \times 2^S$ la relazione di uguaglianza tra sottoinsiemi di S . σ è d'equivalenza in $2^S \times 2^S$.
- (11) Ogni relazioni di uguaglianza tra valori numerici è d'equivalenza.

Prendiamo ad esempio la relazione σ_k definita in 8. Per qualsiasi valore di k la relazione si stabilisce tra i valori $n, m, \dots$ che danno lo stesso resto quando divisi per k . Poiché abbiamo k resti possibili $(0, 1, 2, \dots, k-1)$ allora gli elementi interi in I si raccolgono in k collezioni diverse (pur se infinite) in cui troviamo tutti gli interi che danno lo stesso resto.

Sia $k=2$, le collezioni che vengono determinate da σ_2 sono esattamente l'insieme dei pari (che danno resto 0 se divisi per 2) e dei dispari (resto=1). Come è chiaro dall'esempio per $k=2$, nessun elemento di una classe (es. dispari) appartiene all'altra (pari), perché il calcolo dei resti è lo stesso in OGNI divisione.

Ci troviamo quindi di fronte ad una ripartizione dell'insieme di partenza (cioè I) in un insieme di classi che:

- i) ricoprono tutto l'insieme di partenza ($\text{dispari} \cup \text{pari} = I$)
- ii) sono disgiunte (nessun elemento di una appartiene anche ad un'altra, $\text{dispari} \cap \text{pari} = \emptyset$)

DEF (*Partizione*). Dato un insieme I generico, chiamiamo *partizione di I* un insieme di sottoinsiemi di I , I_j ($j=1, \dots, n$), tali che:

- i) $\bigcup_{j=1}^n I_j = I$ (ricopertura)
- ii) $\forall j \neq t \quad I_j \cap I_t = \emptyset \quad j, t = 1, \dots, n$ (disgiunzione)

DEF (*Classe di Equivalenza*). Sia σ una relazione di equivalenza in un insieme I . Dato un qualsiasi elemento $a \in I$, allora risulta definito univocamente l'insieme di elementi di I in relazione σ con a . Tale sottoinsieme di I si dice *classe di equivalenza* determinata da σ . Per ogni relazione di equivalenza esistono diverse classi di equivalenza (determinate da scelte diverse di $a \in I$).

Osserviamo che al variare della scelta di un elemento a in I , l'insieme delle classi di equivalenza determina una partizione dell'insieme I . Infatti date due classi di equivalenza distinte esse risultano disgiunte (proprietà i)). Inoltre l'unione di tutte le classi di equivalenza ricopre l'intero insieme I (proprietà ii)).

DEF (*Insieme quoziente*). Data una relazione σ di equivalenza in un insieme I , si dice *insieme quoziente di I rispetto a σ* , e si denota con I/σ , l'insieme delle classi di equivalenza di σ in I .

Esempi.

Sia σ_k la relazione di equivalenza definita in (8) nell'insieme degli interi (positivi) I . Nel merito di questo esempio sia $k=2$. Le classi di equivalenza di σ_2 in I sono costituite dai numeri interi positivi che danno lo stesso resto (0 o 1) se divise per 2:

resto=1	$\underline{1} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	dispari
resto=0	$\underline{0} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$	pari

L'insieme quoziente è quindi definito da $I/\sigma_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$. In questo caso l'insieme quoziente è costituito da un numero finito di sottoinsiemi (due resti possibili), ciascuno contenente un numero infinito di elementi.

Nel caso generale una relazione σ_k generica determina un insieme quoziente del tipo:

$$I/\sigma_k = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{k-1}\}$$

comunque formata da k elementi. Tale insieme quoziente è detto delle *classi dei resti modulo k* .

Sia R^2 lo spazio euclideo bidimensionale e σ in $R^2 \times R^2$ la relazione di "equidistante dal centro $O = \langle 0, 0 \rangle$ " definita in (3).

Le classi di equivalenza di σ in $R^2 \times R^2$ sono le circonferenze di centro l'origine e raggio r . Infatti, per ogni reale $r \in R$, esiste una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, contenente tutti punti del piano tra loro in relazione σ .

L'insieme quoziente ammette un elemento per ogni circonferenza del piano di centro l'origine, e tali elementi sono tanti quanti valori diversi possono essere assegnati al raggio r . Denotiamo una circonferenza (cioè tale sottoinsieme del piano) con $\underline{r}$, in analogia con l'esempio precedente. In questo caso quindi l'insieme quoziente

$$I/\sigma = \{ \underline{r} \mid r \in R^+ \}$$

è costituito da un numero infinito di elementi, ciascuno contenente un numero infinito di punti del piano (i punti $\underline{r}$ che giacciono sulla circonferenza di raggio r).

Data la relazione di equivalenza (parallelismo), definita in (4). Una certa classe di equivalenza è l'insieme delle rette che lungo una direzione del piano sono tra loro parallele. Tale insieme non contiene se non le rette lungo una certa direzione. Diverse direzioni determinano diverse classi (disgiunte) di equivalenza. Inoltre poiché per ogni direzione esiste almeno una retta che giace lungo quella direzione allora tutte le direzioni del piano sono espresse da una classe di equivalenza. Quindi l'unione delle classi di equivalenza contiene ogni retta del piano, cioè tutto R . Una classe di equivalenza coincide con una direzione del piano e contiene un numero potenzialmente infinito di rette. L'insieme quoziente è quindi costituito dagli insiemi (infiniti) di rette che giacciono lungo una direzione, ed ammette quindi tanti elementi quante sono le direzioni del piano. In questo caso l'insieme quoziente è costituito da infiniti sottoinsiemi, ciascuno contenente un numero infinito di elementi.

Esercizi Proposti.

1. Sia $N = \{1, \dots, 9\}$. Costruire il prodotto cartesiano N^2 . Stabilire una relazione σ in N^2 tale che $\langle n_1, n_2 \rangle \sigma \langle n_1', n_2' \rangle$ se e solo se $n_1 * n_2 = n_1' * n_2'$. Determinare le proprietà della relazione e dire se è di equivalenza o d'ordine.
2. Sia $A = \{T, C\}$ l'insieme di risultati che un lancio di una moneta può ottenere (ovvero T testa e C croce). Ogni elemento di A^3 rappresenta il risultato di un esperimento eseguito con 3 lanci consecutivi. Definire una relazione σ in A^3 che si stabilisce quando due esperimenti (cioè terne in A^3) danno luogo allo stesso numero di teste T. Determinare le proprietà della relazione σ e dire se essa è d'ordine o di equivalenza.
3. Dimostrare che la relazione di inclusione nell'insieme delle parti di un insieme finito di elementi è d'ordine parziale.
4. Sia $\sigma = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}$. Dire se σ è di equivalenza e d'ordine.

E1.7 Funzioni

DEF (*Funzione*) Dati due insiemi A e B , si dice *funzione* f tra A e B una relazione f tra A e B tale che:

$$f = \{ \langle a, f(a) \rangle \mid f(a) \in B \}$$

e $\forall a \in A \quad \langle a, x \rangle \in f, \langle a, y \rangle \in f \Rightarrow x = y$

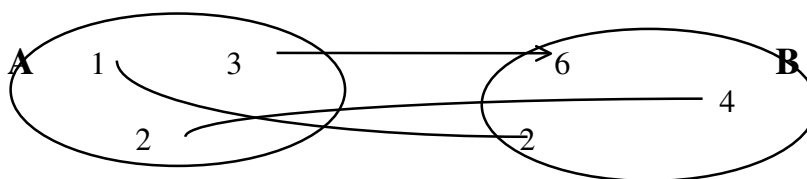
La funzione f così definita è espressa secondo la notazione usuale

$$f : A \rightarrow B$$

Esempi:

- (12) Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. La relazione $f = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle \}$

determina una funzione: ad ogni $a \in A$ assegna il doppio in B .



La relazione dell'esempio (0) non determina una funzione in quanto

$\langle 2, 2 \rangle$ e $\langle 2, 8 \rangle$

appartengono alla relazione ma ovviamente $2 \neq 8$.

Le relazioni (3), (4) e (8) sono di equivalenza e non determinano una funzione.

Definiamo per ciascuna relazione di equivalenza σ in $A \times A$ la seguente relazione tra A e l'insieme quoziente A/σ :

$$f = \{ \langle a, \underline{a} \rangle \in A \times A/\sigma \mid a \in \underline{a} \}$$

che associa cioè ad ogni elemento la classe di equivalenza a cui appartiene: f determina una funzione, poiché ad ogni elemento può essere associata una ed una sola classe di equivalenza.

f nella relazione di equivalenza definita in (3) associa ad ogni punto $\langle x, y \rangle$ la sola circonferenza a cui esso appartiene (circonferenza di raggio $x^2 + y^2$).

Nella relazione dell'esempio (4) ad ogni retta del piano f associa la (unica) direzione lungo cui essa giace.

In (8) infine ad ogni intero $i \in I$ viene associato il suo resto della divisione per k .

Per $k=2$ si ha ad esempio

$$f(i) = \begin{cases} \underline{0} & \text{se } i \text{ è pari} \\ \underline{1} & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

(13) Sia R l'insieme dei reali la relazione f definita in $R \times R$ come segue:

$$f = \{ \langle x, x^2 \rangle \in R \times R \}$$

f è una funzione.

(14) Sia R l'insieme dei reali la relazione f definita in $R \times R$ come segue:

$$f = \{ \langle x, x^{1/2} \rangle \in R \times R \}$$

f è una funzione.

Il *dominio di una funzione* (o di una relazione) tra A e B è l'insieme dei valori di A che hanno un corrispondente nell'insieme di arrivo B . Più precisamente:

DEF (*Dominio di una funzione*). Data $f = \{ \langle a, b \rangle \in A \times B \mid b = f(a) \in B \}$, si dice *dominio di f* , denotato dal simbolo $D(f)$ (o $\text{Dom}(f)$), il seguente insieme:

$$\text{Dom}(f) = D(f) = \{ a \in A \mid \text{per un certo } b \in B, \langle a, b \rangle \in f \}$$

Esempi:

Per l'esempio (13), $D(f) = \mathbb{R}$.

In (14), $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

Il *codominio* di una funzione (o di una relazione) tra A e B e' l'insieme dei valori di B che corrispondono a qualche valore $a \in A$. Piu' precisamente:

DEF (*Codominio di una funzione*). Data una funzione $f = \{ \langle a, b \rangle \in A \times B \mid b = f(a) \in B \}$, si dice codominio di f, denotato dal simbolo $\text{Cod}(f)$, il seguente insieme:

$$\text{Cod}(f) = \{ b \in B \mid \text{per un certo } a \in A, \langle a, b \rangle \in f \}$$

Esempi:

Negli esempi (13) e (14), $\text{Cod}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$.

Operazioni.

Una operazione op in un insieme A e' un funzione tra $A \times A$ ed A,
 $\text{op} : A \times A \rightarrow A$.

Esempio:

Sia + l'operazione di somma. Allora + determina una funzione che ad ogni coppia di elementi di A associa il loro risultato, ancora come elemento di A. Se A e' l'insieme dei naturali N, allora

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{con} \quad +(n_1, n_2) = n_1 + n_2$$

Sia * l'operazione di prodotto. Allora sia $A = \{-1, 0, 1\}$

$$* : A \times A \rightarrow A$$

e' la funzione corrispondente tale che

$*(0,0)$	=	0
$*(0,1)$	=	0
$*(0,-1)$	=	0
$*(1,0)$	=	0
$*(1,-1)$	=	-1
$*(1,1)$	=	1
$*(-1,0)$	=	0
$*(-1,1)$	=	-1
$*(-1,-1)$	=	1