

Soluzioni Compito Scritto - Fisica Generale 2

27 Febbraio 2007

Corso di Laurea Triennale in Chimica

Esercizio n.1

L'espressione del campo elettrostatico é data da:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(x,y,z) = C (yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z})$$

La carica che si trova entro la superficie cubica si ottiene dal teorema di Gauss:

$$Q = \epsilon_o \Phi(\vec{E})$$

Calcoliamo il flusso sulle due superfici giacenti nel piano xz ad $y = 0$ e $y = d$ le cui normali sono rispettivamente $-\hat{y}$ e $\hat{y}$ si ha:

$$\Phi_{y=0}(\vec{E}) = \int_0^d dx \int_0^d dz \vec{E}(x, 0, z) \cdot (-\hat{y}) = \int_0^d dx \int_0^d dz (-)Cxz = -C\frac{d^4}{4}$$

$$\Phi_{y=d}(\vec{E}) = \int_0^d dx \int_0^d dz \vec{E}(x, d, z) \cdot \hat{y} = \int_0^d dx \int_0^d dz Cxz = C\frac{d^4}{4}$$

per cui la somma dei due flussi é nulla. Analogamente si ottiene che la somma dei flussi lungo le superfici giacenti nei piani xy e yz sono rispettivamente nulli per cui la carica $Q = 0$.

Alternativamente si può dedurre che non vi é carica all'interno del cubo calcolando la densità volumetrica di carica:

$$\rho = \epsilon_o \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

e notando che la divergenza del campo elettrostatico é sempre nulla:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0$$

Esercizio n.2

Il campo elettrostatico generato da q nel sistema di riferimento centrato in q ha la seguente espressione:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad r < R$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \quad r > R$$

per cui

$$\vec{E}(R/2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{4}{R^2} \hat{r} = 28.8 \hat{r} \frac{V}{m}$$

$$\vec{E}(2R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4R^2} \hat{r} = 9.0 \hat{r} \frac{V}{m}$$

La densità volumetrica delle cariche di polarizzazione ρ_P si ottiene dalla divergenza del vettore di polarizzazione $\vec{P}$ il quale è proporzionale al campo elettrico:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

In coordinate cartesiane il termine di divergenza si calcola esplicitando la dipendenza da x , y e z della coordinata radiale ($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right) = \\ &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} = \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 \end{aligned}$$

Ne deriva che $\rho_P = 0$.

Esercizio n.3

Indichiamo con ϕ l'angolo tra la normale alla spira ed il campo magnetico $\vec{B}$. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira é:

$$\Phi(\vec{B}) = abB \cos \phi$$

Siccome la spira ruota con velocità angolare ω l'angolo ϕ varia nel tempo con legge

$$\phi(t) = \omega t$$

dove si é tenuto in conto che al tempo $t = 0$ il campo $\vec{B}$ é perpendicolare alla spira. La forza elettromotrice indotta é:

$$f = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = abB\omega \sin(\omega t)$$

Al tempo $t = 10 \text{ ms}$ si ha $f = 7.1 \text{ V}$. Si noti che alla velocità di 157 rad/s dopo 10 ms la spira é ruotata di un angolo $\phi \simeq \pi/2$ per cui si ha il massimo (in valore assoluto) di f . La corrente indotta si ottiene notando che la resistenza complessiva della spira é:

$$R = \rho \frac{2(a+b)}{S} = 900 \Omega$$

e quindi

$$i = \frac{f}{R} = 7.9 \text{ mA}$$