

Soluzioni Primo Esonero - Fisica Generale 2

4 Aprile 2006

Corso di Laurea Triennale in Chimica

Esercizio n.1

Il campo elettrostatico

$$\mathbf{E}(x, y, z) = k (y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$$

é sempre diretto perpendicolarmente all'asse $\mathbf{k}$ e non dipende dalla variabile z . Il potenziale si ottiene integrando $\mathbf{E}$ lungo il percorso stabilito, ovvero lungo i tre segmenti che dall'origine portano al punto P.

Per il percorso 1) si ha:

$$V(P) - V(0) = V(P) - V(B) + V(B) - V(A) + V(A) - V(0)$$

dove:

$$V(A) - V(0) = - \int_0^{x_1} \mathbf{E}(x, 0, 0) \cdot \mathbf{i} \, dx = 0$$

$$V(B) - V(A) = - \int_0^{y_1} \mathbf{E}(x_1, y, 0) \cdot \mathbf{j} \, dy = - \int_0^{y_1} k x_1 \, dy = - k x_1 y_1$$

$$V(P) - V(B) = - \int_0^{z_1} \mathbf{E}(x_1, y_1, z) \cdot \mathbf{k} \, dz = 0$$

Dunque:

$$V(P) - V(0) = - k x_1 y_1$$

Per il percorso 2) si ha:

$$V(P) - V(0) = V(P) - V(B) + V(B) - V(C) + V(C) - V(0)$$

$$V(C) - V(0) = - \int_0^{y_1} \mathbf{E}(0, y, 0) \cdot \mathbf{j} \, dy = 0$$

$$V(B) - V(C) = - \int_0^{x_1} \mathbf{E}(x, y_1, 0) \cdot \mathbf{i} \, dx = - \int_0^{x_1} k y_1 \, dx = - k x_1 y_1$$

$$V(P) - V(B) = - \int_0^{z_1} \mathbf{E}(x_1, y_1, z) \cdot \mathbf{k} \, dz = 0$$

e quindi:

$$V(P) - V(0) = -k x_1 y_1$$

Quindi i due percorsi forniscono la stessa differenza di potenziale in accordo con il concetto di campo conservativo. Numericamente:

$$V(P) - V(O) = -1 V$$

In un punto generico dello spazio possiamo scrivere:

$$V(x, y, z) = V(0, 0, 0) - k x y$$

ed il campo elettrostatico di partenza é ottenuto nel modo seguente:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla \cdot V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = k (y \mathbf{i} + x \mathbf{j})$$

Esercizio n.2

La forza su q é nulla quando la somma dei campi elettrici generati da q_1 e q_2 é nulla. Questa condizione avviene solo in un punto P giacente sull'asse definito da q_1 e q_2 . Poiché entrambe le cariche sono positive P deve trovarsi tra le due cariche. Sia x la distanza che separa P da q_1 . $d - x$ sarà la distanza tra P e q_2 :

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d - x)^2}$$

che risolta da:

$$x = \frac{d}{1 \pm \sqrt{q_2/q_1}}$$

La soluzione con il segno - non é fisicamente accettabile in quanto definisce un punto esterno al segmento che collega le due cariche. Dunque:

$$x = \frac{d}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = 5.63 \text{ cm}$$

Se a q viene data una piccola spinta in una direzione che forma un angolo non nullo con la congiungente q_1 e q_2 , q si allontanerà indefinitivamente (equilibrio instabile) ed all'infinito l'energia cinetica sarà pari a:

$$T = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{d-x} \right) = 1.42 \cdot 10^{-6} J$$

Esercizio n.3

Sia l'asse x orientato dalla sbarretta al punto P e si prenda come origine l'estremo destro della sbarretta che é quello piú vicino al punto P. Per $-l/2 < x < 0$ la carica q é distribuita uniformemente con densità $\lambda = 2q/l$ mentre per $-l < x < -l/2$ si ha $\lambda' = 2q'/l = -\lambda$. Il campo elettrostatico nel punto P sarà dato da:

$$\mathbf{E}(P) = \left(\int_{-l}^{-l/2} dx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\lambda}{(d-x)^2} + \int_{-l/2}^0 dx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{(d-x)^2} \right) \mathbf{u}_x$$

ed integrando si ottiene:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{ld} \left(1 + \frac{1}{1+l/d} - \frac{2}{1+l/(2d)} \right) \mathbf{u}_x = 600 \mathbf{u}_x \frac{V}{m}$$

Esercizio n.4

La carica all'interno della sfera é data da:

$$Q_{tot} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R_0} dr r^2 \rho(r) = \pi \rho_0 R_0^3 = 3.14 \cdot 10^{-8} C$$

Il campo elettrico all'interno della sfera é dato dalla seguente espressione:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

essendo $Q(r)$ la carica contenuta entro la sfera di raggio $r < R_0$:

$$Q(r) = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r dr r^2 \rho(r) = \pi \rho_0 \frac{r^4}{R_0}$$

Dunque:

$$E(r) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R_0} r^2 = 2.82 \cdot 10^6 \frac{r(m)^2}{r(m)^2} \quad r < R_0$$

Al difuori della sfera:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

dunque:

$$E(r) = \frac{\rho_0 R_0^3}{4\epsilon_0 R_0} \frac{1}{r^2} = 2.82 \cdot 10^2 \frac{1}{r(m)^2} \quad r > R_0$$