

Soluzioni Esonero - Fisica Generale 2

5 Maggio 2008

Corso di Laurea Triennale in Chimica

Esercizio n.1

Le cariche si distribuiscono in modo da annullare il campo elettrostatico all'interno delle due sfere cave, per cui indicando con

$$S_i = 4\pi R_i^2 \quad i = 1, \dots, 4$$

le aree delle quattro superfici sferiche nei tre casi si ha:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = \frac{q}{S_2} \quad \sigma_3 = \frac{-q}{S_3} \quad \sigma_4 = \frac{q}{S_4} \\ 2) \quad & \sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = \frac{q}{S_4} \\ 3) \quad & \sigma_1 = \frac{-q}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{q}{S_2} \quad \sigma_3 = \frac{-q}{S_3} \quad \sigma_4 = \frac{q}{S_4} \end{aligned}$$

L'energia elettrostatica si calcola utilizzando la formula generale

$$U_e = \frac{\epsilon_o}{2} \int dV |\mathbf{E}|^2$$

e dunque bisogna conoscere il campo $\mathbf{E}$ in tutto lo spazio. Applicando il teorema di gauss nei tre casi si ha:

$$\begin{aligned} 1) \quad & E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} \quad R_2 < r < R_3 \quad \text{ed} \quad r > R_4 \\ & E = 0 \quad \text{altrimenti} \\ 2) \quad & E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} \quad r > R_4 \\ & E = 0 \quad \text{altrimenti} \\ 3) \quad & E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} \quad r < R_1, \quad R_2 < r < R_3 \quad \text{ed} \quad r > R_4 \\ & E = 0 \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

ove si è omessa la notazione vettoriale essendo il campo banalmente radiale.

Quindi il campo ha sempre la stessa forma, quello generato da una carica puntiforme. Ciò che contraddistingue i tre casi del testo è dove il campo è nullo. Ogni qualvolta il campo è $\neq 0$ si ha un contributo positivo all'energia elettrostatica, quindi è facile prevedere che l'energia sarà minore nel caso 2). Mentre nel caso 3) si ha l'energia maggiore. Si noti che in quest'ultimo caso l'energia è ∞ poichè in prossimità della carica il campo diverge.

L'espressione dell'energia elettrostatica si ottiene notando che

$$U_e = \frac{\epsilon_o}{2} 4\pi \int_a^b dr r^2 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 \frac{1}{r^4} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) ,$$

e ponendo i corretti estremi di integrazione nelle regioni in cui il campo non è nullo

$$\begin{aligned} 1) \quad U_e &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \\ 2) \quad U_e &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_o} \frac{1}{R_4} \\ 3) \quad U_e &= \infty . \end{aligned}$$

Esercizio n.2

Il potenziale nel centro della sfera rispetto all' ∞ è per definizione dato da:

$$V_o - V_\infty = \int_0^\infty dr E$$

dove si è utilizzata la simmetria sferica della distribuzione delle cariche e si è scelto un percorso di integrazione radiale per semplificare l'integrale. Il campo elettrico all'esterno della sfera è banalmente quello di una carica puntiforme immersa nel dielettrico:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r} \frac{1}{r^2} \quad r > R .$$

All'interno della sfera l'andamento del campo dipende da come è distribuita la carica q . Applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r < R$ concentrica con la sfera si ha:

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{q_r}{\epsilon_o}$$

essendo q_r la carica racchiusa dalla superficie di raggio r ($< R$):

$$q_r = 4\pi \int_0^r dr \, r^2 \, \rho_0 \, \frac{r}{R} = \rho_0 \pi \frac{r^4}{R} = q \left(\frac{r}{R} \right)^4$$

dove si è introdotto per convenienza la carica q della sfera che non è altro che q_r per $r = R$. Quindi il campo è

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad r < R .$$

A questo punto siamo in grado di calcolarci il potenziale al centro della sfera ($V_\infty = 0$):

$$\begin{aligned} V_o &= \int_0^R dr \, \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \int_R^\infty dr \, \frac{q}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r} \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon_r} \right) \end{aligned}$$

che è un'equazione per ϵ_r

$$\epsilon_r = \left(\frac{V_o}{q/(4\pi\epsilon_o R)} - \frac{1}{3} \right)^{-1} = 4.5 .$$

Il dielettrico è lineare, ovvero il vettore di polarizzazione $\mathbf{P}$ è proporzionale ad $\mathbf{E}$, quindi sulla superficie della sfera la densità delle cariche di polarizzazione è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_P &= \mathbf{P} \cdot (-\hat{r}) = \epsilon_o (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \cdot (-\hat{r}) = \\ &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R^2} = -6.2 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^2} . \end{aligned}$$

Il loro effetto è quello di diminuire di ϵ_r il campo elettrico. Esse possono essere determinate ponendo $q_P = \sigma_P \, 4\pi R^2$ e notando che il campo

elettrico che generano per $r > R$ si oppone a quello generato da q e che ha la forma di quello generato da una carica puntiforme posta nel centro della sfera caricaa:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} + \frac{q_P}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o\epsilon_r} \frac{1}{r^2}$$

per cui:

$$q_P = - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q .$$

Esercizio n.3

Il campo elettrico all'interno dei dielettrici vale:

$$E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_{ri}}$$

per cui

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} . \quad (1)$$

La differenza di potenziale dopo aver inserito i dielettrici sarà:

$$V' = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \frac{d}{2} .$$

Si noti che l'inserimento dei dielettrici avviene con il condensatore isolato per cui la carica sulle armature non cambia:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_o} = \frac{V}{d}$$

e quindi:

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) . \quad (2)$$

Le due equazione (1) e (2) messe a sistema con i dati del problema

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \\ \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \end{aligned}$$

permettono di calcolare le costanti dielettriche relative:

$$\epsilon_{r1} = 3 \qquad \epsilon_{r2} = 6 .$$