

Soluzioni Esonero - Fisica Generale 2

7 Aprile 2008

Corso di Laurea Triennale in Chimica

Esercizio n.1

Il campo elettrico $\mathbf{E}$ generato dalle tre cariche è la somma dei campi elettrici generati dalle tre singole cariche:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 .$$

In modo formale si può procedere al calcolo dei singoli campi

$$\mathbf{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}$$

dove $\mathbf{r}_i$ sono i raggi vettori che applicati sulla posizione delle cariche identificano un generico punto lungo l'asse y.

Nel sistema di riferimento indicato nella figura i tre raggi vettori sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (0, y) - (-a, 0) = (a, y) \\ \mathbf{r}_2 &= (0, y) - (0, 0) = (0, y) \\ \mathbf{r}_3 &= (0, y) - (a, 0) = (-a, y)\end{aligned}$$

per cui indicando con $q = q_1 = q_2 = -q_3$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{(a, y)}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{(0, y)}{y^3} \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_o} \frac{(-a, y)}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Come era prevedibile la somma $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3$ è totalmente diretta lungo l'asse delle x ed il verso è sempre quello del versore $\hat{x}$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{(2a, 0)}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{2a}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} ,$$

mentre $\mathbf{E}_2$ è totalmente diretto lungo l'asse y,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{y}{y^3} \hat{y}$$

ed il suo verso è positivo ($+\hat{y}$) o negativo ($-\hat{y}$) a seconda se ci si trovi rispettivamente sul semiasse positivo o negativo delle y. In $y = 0$ il campo diverge.

Il campo totale è dunque:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{2a}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x} + \frac{y}{y^3} \hat{y} \right) .$$

L'angolo che il campo forma con l'asse y per $y = a$ è per definizione

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \hat{y}}{E} \right)$$

dove il campo $\mathbf{E}$ ed il suo modulo E sono calcolati in $y=a$:

$$\mathbf{E} \cdot \hat{y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \hat{x} + \hat{y} \right) \cdot \hat{y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{a^2} .$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

Numericamente si ottiene

$$\alpha = \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} = 35.3^\circ .$$

L'energia potenziale elettrostatica del sistema delle tre cariche è:

$$U_e = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q^2}{a} - \frac{q^2}{2a} - \frac{q^2}{a} \right) = -2.2 \cdot 10^{-7} J .$$

Esercizio n.2

Il campo elettrico generato dal piano è diretto lungo la normale al piano ($\hat{n}$)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \hat{n}$$

ed esercita una forza attrattiva sull'elettrone il cui modulo è:

$$F = e \frac{\sigma}{2\epsilon_o} = 9.0 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

Si noti che essendo il piano indefinito, la forza non dipende dal punto P in cui si trova l'elettrone.

Quando all'elettrone in P viene conferita l'energia cinetica T per allontanarlo dal piano, esso si muoverà con moto uniformemente decelerato per via della forza attrattiva esercitata dal campo elettrico. La posizione in cui si ferma ed inverte il suo moto può essere determinata dalla conservazione dell'energia

$$T_i + (-e)V_i = T_f + (-e)V_f .$$

Notando che nella posizione iniziale l'elettrone ha energia cinetica $T_i = T$ ed in quella finale $T_f = 0$ si ha:

$$T = -e(V_f - V_i) = -e \int_f^i d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} . = e \int_i^f d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} .$$

Come percorso di integrazione si può scegliere la traiettoria dell'elettrone in modo che $d\mathbf{l} \cdot \hat{n} = dl$ con origine nel piano. Quindi:

$$T = e \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \int_d^{d_{max}} dl = e \frac{\sigma}{2\epsilon_o} (d_{max} - d)$$

che è un'equazione per d_{max} :

$$d_{max} = d + \frac{2\epsilon_o}{\sigma} \frac{T}{e} = 27.7 \text{ cm} .$$

Esercizio n.3

Il campo elettrico generato da una sfera centrata in C sulla cui superficie vi è la carica q distribuita uniformemente è pari al campo generato da una carica puntiforme q posta in C al di fuori della sfera e nullo all'interno della sfera.

Il punto a distanza $x_o = 3R$ si trova all'esterno di entrambe le sfere per cui il campo si annulla in quanto le due sfere hanno cariche di segno opposto. Quindi eguagliando i due campi elettrici si ha:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{x_o^2} = \frac{q/4}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{(x_o - x')^2}$$

essendo $x_o - x'$ la distanza del punto dal centro della sfera carica negativamente. Quindi:

$$\frac{x_o^2}{4} = (x_o - x')^2$$

ed facendo la radice quadrata di entrambi i membri

$$\frac{x_o}{2} = \pm (x_o - x') .$$

Siccome $x_o > 0$ e $x_o > x'$, solo la soluzione con il segno $+$ è accettabile. Quindi:

$$x' = \frac{x_o}{2} = \frac{3}{2} R = 7.5 \text{ cm} .$$

Si noti che all'esterno delle due sfere sul semiasse positivo esiste un punto in cui il campo si annulla in quanto la carica negativa è allo stesso tempo più vicina ad x_o ed in modulo più piccola rispetto alla carica positiva¹. Diverso è il caso dei punti $x < -R$: qui il campo non può annullarsi essendo tali punti sempre più vicini alla sfera positiva che ha carica maggiore in modulo.

Rimangono da analizzare i punti all'interno delle sfere: per $R/2 < x < R$ si è all'interno di entrambe le sfere e dunque il campo è nullo. Nelle altre regioni si è all'interno di una singola sfera, ma all'esterno dell'altra. Quest'ultima genera un campo $\neq 0$ che è il campo totale.

¹Ovviamente l'esistenza di tale punto dipende anche dal rapporto delle due cariche.