

Soluzioni Scritto - Fisica Generale 2

26 Settembre 2007

Corso di Laurea Triennale in Chimica

Esercizio n.1

Il valore della corrente elettrica che attraversa la sfera si ottiene dalla legge di Ohm conoscendo la resistenza della sfera. Essendo la direzione della corrente radiale, la resistenza viene calcolata a partire dalla resistività ρ e dividendo la sfera in tanti gusci sferici di spessore dr con r la distanza dal centro della sfera:

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2} .$$

Questi gusci sferici infinitesimi sono come tante resistenze in serie e dunque la resistenza R della sfera la si ottiene sommando tali contributi:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1.6 \, \Omega .$$

Dunque:

$$i = \frac{V}{R} = 6.2 \, A .$$

La velocità di deriva $\mathbf{v}$ degli elettroni è legata alla densità di corrente $\mathbf{J}$ tramite la relazione

$$\mathbf{J} = n e \mathbf{v}$$

essendo e la carica degli elettroni ed n la densità numerica degli stessi. Notando che n è costante in tutta la sfera (in quanto la densità del conduttore è costante) e che il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso una superficie sferica di raggio r centrata nella sfera non è altra che la corrente i si ha¹:

$$\Phi(\mathbf{J}) = J(r) 4\pi r^2 = n e v(r) 4\pi r^2 = i$$

¹La densità di corrente, e quindi la velocità di deriva, sono radiali.

si ottiene la dipendenza dell'intensità della velocità di deriva da r :

$$v(r) = \frac{i}{4\pi r^2} .$$

La velocità di deriva è massima sulla superficie interna della sfera ed è minima sulla superficie esterna:

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 = 4 .$$

Esercizio n.2

Per dimostrare che il condensatore con la lastra al suo interno si comporta come un sistema di più condensatori in serie, basta ricorrere alla definizione di capacità

$$C = \frac{Q}{V}$$

e determinare la carica Q e la differenza di potenziale V . In entrambi i casi del problema, si procederà al calcolo della differenza di potenziale ai capi del condensatore a partire dall'andamento del campo elettrostatico $\mathbf{E}$. Sia l'asse x perpendicolare all'armatura del condensatore con origine nell'armatura superiore e supponiamo che la sbarretta sia posta a distanza x' dall'origine. Nel caso del rame che è un conduttore si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_o} \mathbf{x} & 0 < x < x' \\ \mathbf{E} &= 0 & x' < x < x' + d \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_o} \mathbf{x} & x' + d < x < h \end{aligned}$$

essendo σ la densità superficiale di carica sulle armature legata alla carica Q dalla relazione $\sigma = Q/\Sigma$ e $\mathbf{x}$ il versore dell'asse x . Scegliendo un percorso lungo l'asse x si può ottenere la differenza di potenziale tra le due armature:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^h E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_o} (x' + h - x' - d) = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{Q}{\Sigma} (h - d) .$$

Notiamo che il risultato non dipende dalla posizione x in cui si trova la lastra. Dall'espressione trovata si ottiene:

$$C = \epsilon_o \frac{\Sigma}{h-d} = C_o \frac{h}{h-d} = \frac{3}{2} C_o$$

dove si $C_o = \epsilon_o \Sigma/h$ è la capacità del condensatore vuoto.

Questa capacità è proprio quella di due condensatori in serie di area Σ e distanze tra le armature x' e $h - x' - d$ ²:

$$\frac{1}{C} = \frac{x'}{\epsilon_o \Sigma} + \frac{h - x' - d}{\epsilon_o \Sigma} = \frac{2}{3} \frac{1}{C_o}.$$

Nel caso del quarzo che è un dielettrico il campo non si annulla all'interno della lastra:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_o} \mathbf{x} & 0 < x < x' \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_o \epsilon_r} \mathbf{x} & x' < x < x' + d \\ \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_o} \mathbf{x} & x' + d < x < h \end{aligned}$$

ed analogamente al caso del rame:

$$V = \int_0^h E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \left(x' + \frac{d}{\epsilon_r} + h - x' - d \right) = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{Q}{\Sigma} \left(h + \frac{d}{\epsilon_r} - d \right).$$

$$C = \epsilon_o \frac{\Sigma}{h + d/\epsilon_r - d} = C_o \frac{h}{h + d/\epsilon_r - d} = \frac{4}{3} C_o.$$

Anche in questo caso il risultato non dipende dalla posizione x in cui si trova la lastra. Questa capacità è proprio quella di tre condensatori in serie di area Σ . Due hanno distanze tra le armature x' , e $h - x' - d$ e al loro interno vi è il vuoto. Il rimanente ha distanze tra le armature d ed al suo interno vi è il quarzo.

$$\frac{1}{C} = \frac{x'}{\epsilon_o \Sigma} + \frac{d}{\epsilon_o \epsilon_r \Sigma} + \frac{h - x' - d}{\epsilon_o \Sigma} = \frac{3}{4} \frac{1}{C_o}.$$

²La lastra di rame rappresenta il contatto tra i due condensatori.

Esercizio n.3

Il nastro può essere pensato come tanti fili indefiniti uno vicino all'altro attraversati da una corrente infinitesima di e dunque il campo magnetico sarà la somma dei campi magnetici generati da questi fili. Nel piano del nastro, i campi da sommare $d\mathbf{B}$ generati dai fili avranno tutti la stessa direzione perpendicolare al piano e lo stesso verso. Tale verso sarà entrante nel piano alla destra del nastro ed uscente alla sua sinistra (in accordo alla direzione della corrente mostrata in figura). Questo semplifica il calcolo poichè il campo generato dalla corrente che scorre nel nastro avrà la stessa direzione e verso di quello dei singoli fili e la sua intensità sarà niente altro che la somma delle intensità dei singoli contributi infinitesimi.

Sia l'asse x ortogonale alla corrente e giacente nel piano definito dal nastro e con origine in un punto del bordo sinistro del nastro stesso. Consideriamo ora un filo indefinito nella posizione x che sarà attraversato dalla corrente $di = i dx/b$. Esso genererà in un punto generico P sull'asse x a distanza x_P dall'origine un campo di intensità

$$dB = \frac{\mu_o}{2\pi} i \frac{dx}{b} \frac{1}{x_P - x} .$$

L'intensità del campo totale sarà allora:

$$B = \int_0^b dx \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{b} \frac{1}{x_P - x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{b} \log \left(\frac{x_P}{x_P - b} \right) .$$

Se il punto P si trova alla distanza d dall'estremo destro del nastro (come mostrato nella figura del testo), $x_P = b + d$ e dunque:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{b} \log \left(\frac{b+d}{d} \right) = 10^{-4} \log \left(1 + \frac{2}{d[cm]} \right) T .$$

Si noti che se il punto P si fosse trovato nella porzione di piano a sinistra del nastro alla distanza d dall'estremo sinistro, il campo B avrebbe la stessa espressione appena trovata.

Un filo rettilineo indefinito posto lungo la mediana del filo che fosse attraversato dalla stessa corrente i genererebbe nel punto P per $d = 10$ cm un campo di intensità pari a:

$$B' = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{b/2 + d} .$$

L'errore % che si commetterebbe nel fare questa approssimazione è:

$$\frac{B' - B}{B} = 1 - \frac{b/2 + d}{b} \log \left(\frac{b + d}{d} \right) = -0.28 \% ,$$

ovvero con il filo il campo sarebbe sottostimato di solo il 0.28 %.