

ES 1

La probabilità di una certa malattia genetica (G) è dell'1% nei neonati maschi (M) e dello 0.5% nelle neonate femmine (F). E' noto che la probabilità che un neonato sia maschio è pari a 51%. Qual è la probabilità di avere:

- 1) un bimbo maschio malato?
- 2) una bimba femmina malata?
- 3) un bimbo/a malato/a?

Sol.

Dati del problema:

$$P(M)=0.51 \quad P(F)=1-0.51=0.49 = P(\text{non } M)$$

$$P(G | M)=0.01$$

$$P(G | F)=0.005$$

$$1) P(M \& G) = P(M) * P(G|M) = 0.51 * 0.01 = 0.0051$$

$$2) P(F \& G) = 0.49 * 0.005 = 0.00245$$

$$3) P(G) = P((G \& M) \text{ oppure } (G \& F)) = P(M \& G) + P(F \& G) = 0.0051 + 0.00245 = 0.00755$$

$$[\text{Notare la tipica scomposizione: } = P(M) * P(G|M) + P(F) * P(G|F)]$$

ES 2

La prevalenza del diabete mellito in Italia è stimata intorno al 4% della popolazione; fra i diabetici, in circa 1 caso su 10 si tratta di diabete di tipo 1. Il 7% dei pazienti con diabete di tipo 1 soffre anche di celiachia.

Notazioni: Diabete: evento D; Diabete di tipo 1: evento DT1; Celiachia: evento C

- 1) Dire quanto vale la probabilità che una persona abbia il diabete di tipo I
- 2) Dire quanto vale la probabilità che una persona abbia il diabete di tipo I e la celiachia

Sol.

Dati del problema:

$$\Pr(D)=0.04 \quad \Pr(DT1 | D)=0.1 \Pr(C | DT1)=0.07$$

$$1) \Pr(DT1)=\Pr(DT1 | D) \cdot \Pr(D) = 0.1 \cdot 0.04 = 0.004$$

$$2) \Pr(C \& DT1)=\Pr(C | DT1) \cdot \Pr(DT1)=0.07 \cdot 0.004=0.00028$$

ES 3

Supponiamo che sia noto che le donne che hanno una certa patologia hanno problemi di sterilità e di maggiore abortività spontanea: la probabilità che il concepimento riesca (la donna entra in gravidanza) è pari al 20%, e in caso di gravidanza la probabilità di aborto spontaneo è pari a 15%.

Dunque, per una donna con questa patologia:

1. Dire con che probabilità ha una gravidanza che si conclude con un aborto spontaneo.
2. Dire quanto vale la probabilità che riesca a diventare madre.
3. Dire quanto vale la probabilità che non riesca a diventare madre.

Notazioni: Gravidanza: evento G; Aborto spontaneo: evento A; Maternità: M

Sol.

Dati del problema:

$$P(G)=0.2$$

$$P(A | G) = 0.15$$

$$1) P(G \& A) = P(G) * P(A | G) = 0.2 * 0.15 = 0.03$$

$$2) P(M) = P(G \& \text{non}A) = P(G) * P(\text{non}A | G) = 0.2 * (1 - P(A | G)) = 0.2 * (1-0.15) = 0.17$$

$$3) P(\text{non}M)=1-0.17 = 0.83$$

Altro procedimento:

nonM = nonG oppure [unione] G&A

$$p(\text{non}M) = p(\text{non}G) + p(G\&A) - 0$$

$$=(1-0.2) + 0.03 = 0.83$$

ES 4

Due ospedali, A e B, sono all'avanguardia nell'utilizzo di una special tecnica chirurgica. Nell'ospedale A la probabilità di successo nell'intervento è del 50%, nell'ospedale B è del 30%. Un paziente può essere operato con uguale probabilità in ciascuno dei due ospedali. Qual è la probabilità che abbia un intervento riuscito? E come cambia questa probabilità se ci sono minori probabilità di essere operato nell'ospedale A, e quindi maggiori per l'ospedale B?

Sol.

Dati del problema:

$$P(O1)=P(O2)=1/2$$

$$P(R | O1)=1/2$$

$$P(R | O2)=3/10$$

$$P(R)=P(R|O1) \cdot P(O1) + P(R|O2) \cdot P(O2)=0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5=0.4$$

Nel secondo caso, $p(R)$ diminuisce, poiché diminuisce il "peso" che si dà a $P(R|O1)$ [la "scomposizione" ci fa vedere che la prob. di R è una sorta di media pesata fra la prob. di R in A e la prob. di R in B]

ES 5

In un ospedale si teme vi sia contaminazione con un raro batterio, con probabilità di contrarne infezione (evento B) pari a 5%. Un paziente presenta delle convulsioni (evento C). Si sa che in caso di infezione da quel batterio la probabilità di convulsioni è 90%, mentre se agiscono altri batteri o altre cause essa è solo del 20%. Qual è la probabilità che quel paziente con le convulsioni sia infetto dal batterio B?

Sol.

Dati del problema:

$$P(B)=0.05$$

$$P(C | B) = 0.9$$

$$P(C | \text{non} B) = 0.2$$

Si utilizza la formula di Bayes:

$$P(B | C) = P(B) \cdot P(C | B) / [P(B) \cdot P(C | B) + P(\text{non} B) \cdot P(C | \text{non} B)]$$

$$= 0.05 \cdot 0.9 / (0.05 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.2) = 0.191$$

ES 6

Un insegnante di scuola media è convinto che l'alunno Mario non abbia studiato la lezione, diciamo con probabilità 70%. Secondo l'esperienza dell'insegnante, se un alunno studia prende Ottimo con probabilità 90%, mentre se non studia solo nel 20% dei casi prende ottimo. Al compito in classe, Mario prende Ottimo. Con che probabilità Mario ha copiato – cioè, non aveva studiato?

Sol.

Dati del problema:

Mario studia $\rightarrow p(S) = 0.3$

Mario non studia [= Mario copia] $\rightarrow p(\text{non } S) = 0.7$

Prendere Ottimo $\rightarrow P(O | S) = 0.9$

$P(O | \text{non } S) = 0.2$

Domanda: $P(\text{non } S | O)$.

Si applica la formula di Bayes:

$$P(\text{non } S | O) = \frac{P(\text{non } S) \cdot P(O | \text{non } S)}{[P(\text{non } S) \cdot P(O | \text{non } S) + P(S) \cdot P(O | S)]}$$
$$= \frac{0.7 \cdot 0.2}{(0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.9)} = 0.34$$

ES 7

Si stima che la celiachia abbia nella popolazione una prevalenza del 1%. Il test diagnostico tTG per la celiachia presenta sensibilità 97% e specificità 95%.

Notazioni: Celiachia: evento C; Test Positivo: TP; Test Negativo: TN

1) Dire quanto vale la probabilità che un celiaco risulti positivo al test, e quanto vale la probabilità che un celiaco risulti negativo al test.

2) Dire quanto vale la probabilità che un individuo qualunque della popolazione sia celiaco, e quanto vale la probabilità che un individuo a cui risulti test positivo sia celiaco.

Sol.

1) rispettivamente, 0.97 e 0.03

2) la prima vale 0.01, per la seconda applichiamo la formula di Bayes:

$$P(C | TP) = \frac{(0.97 \cdot 0.01)}{(\text{numeratore} + 0.05 \cdot 0.99)} = 0.164$$

ES 8

Secondo degli studi, il 25% dei figli di genitori che hanno avuto una certa malattia presentano un'anomalia genetica che aumenta il rischio di sviluppare a loro volta tale malattia. Esiste un test diagnostico per rilevare la presenza di quell'anomalia genetica con sensibilità 80% e specificità 95%.

Notazioni: Anomalia: evento A; Test Positivo: TP; Test Negativo: TN

1) Dire quanto vale la probabilità che il test risulti negativo se il bambino ha l'anomalia genetica, e quanto vale la probabilità che il test risulti negativo se il bambino non ha l'anomalia genetica.

2) Dire quanto vale la probabilità che un bambino a cui risulti test positivo presenti l'anomalia genetica, e quanto vale la probabilità che un bambino con anomalia abbia test positivo.

Sol.

1) rispettivamente, 0.20 e 0.95

2) la seconda vale 0.80, per la prima applichiamo la formula di Bayes:

$$P(A | TP) = \frac{(0.80 \cdot 0.25)}{(\text{numeratore} + 0.05 \cdot 0.75)} = 0.842$$

ES 9

In un ospedale un gruppo di 10 pazienti viene sottoposto a un intervento chirurgico in day hospital; dopo l'intervento tuttavia di solito nel 10% dei casi si ha bisogno di ricovero prolungato.

- Qual è la probabilità che tutti i pazienti vadano a casa dopo l'intervento?
- Qual è la probabilità che almeno uno abbia bisogno del ricovero prolungato?

$X = \text{numero di ricoveri prolungati} \sim \text{Binomiale } (N=10, p=0.1)$

$$\Pr(X = 0) = \binom{10}{0} 0.1^0 0.9^{10} = 0.349$$

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(X = 0) = 0.651$$

ES 10

Rispondere alle stesse domande nel caso che i pazienti siano 300 e la probabilità di ricovero prolungato sia 1%.

$X = \text{numero di ricoveri prolungati} \sim \text{Poisson } (\lambda = Np = 300 \cdot 0.01 = 3)$

$$\Pr(X = 0) = 0.887 = \exp(-3) = 0.05$$

$$\Pr(X > 0) = 1 - \Pr(X = 0) = 0.95$$

ES 11

Un medico ha in cura 40 pazienti di una malattia molto grave, che guarisce solo il 3 per mille dei pazienti.

- 1) Quanto vale la probabilità che nessuno dei suoi pazienti guarisca?
- 2) Quanto vale la probabilità che almeno uno dei suoi pazienti guarisca?
- 3) Quanto vale la probabilità che solamente uno dei suoi pazienti guarisca?

$\text{Poisson con tasso } \lambda = 0.003 \cdot 40 = 0.12$

$$1) \Pr(X = 0) = \exp(-0.12) = 0.887$$

$$2) \Pr(X > 0) = 1 - \Pr(X = 0) = 0.113$$

$$3) \Pr(X = 1) = \exp(-0.12) \cdot 0.12 = 0.106$$

ES 12

Secondo uno studio sui consumi alimentari condotto su un gruppo di volontari, il consumo giornaliero di fibra (in grammi) è distribuito come una Normale con media 5 e deviazione standard 1.5.

- 1) Quante persone su 100 consumano più di 7 grammi di fibra al giorno?
- 2) Quante persone su 100 consumano meno di 5 grammi di fibra al giorno?

$$\Pr(X > 7) = \text{area nella coda superiore. } Z = (7 - 5) / 1.5 = 1.33 \quad \phi(Z) = 0.908 \quad \Pr(X > 7) = 1 - 0.908 = 0.092$$

$$\Pr(X < 5) = 0.5$$

ES 13

Supponiamo il 5% dei pazienti sottoposti a trapianto d'organo muore nel breve termine. In un reparto specializzato, si eseguono 20 trapianti all'anno.

- 1) Quanto vale la probabilità che si verifichi un decesso fra i trapiantati del 2013?
- 2) Quanto vale la probabilità che non si verifichi alcun decesso fra i trapiantati del 2013?

$\text{Binomiale con } p = 0.05 \text{ e } N = 20$

$$1) \Pr(X = 1) = 0.377$$

$$2) \Pr(X = 0) = 0.358$$

$$\Pr(X = 0) = \binom{20}{0} 0.05^0 0.95^{20} = 0.358$$

$$\Pr(X = 1) = \binom{20}{1} 0.05^1 0.95^{19} = 0.377$$

ES 14

Una certa malattia insorge attorno a una età media pari a 50 anni, con distribuzione Normale caratterizzata (oltre che da $\mu=50$) da $\sigma=10$.

- 1) Quanti pazienti hanno un'età superiore a 70 al momento della diagnosi?
- 2) Quanti pazienti hanno un'età compresa fra 60 e 70 al momento della diagnosi?

$\Pr(X > 70)$ = area nella coda superiore.

$70 \rightarrow Z = (70 - 50) / 10 = 2$ $\Phi(Z) = 0.977$ $\Pr(X > 70) = 1 - 0.977 = 0.023$

$\Pr(X \text{ in } (60-70))$:

$60 \rightarrow Z = (60 - 50) / 10 = 1$ $\Phi(Z) = 0.841$

$\Pr(X \text{ in } (60-70)) = 0.977 - 0.841 = 0.136$