

SEGNALI E SISTEMI TEMPO-DISCRETI

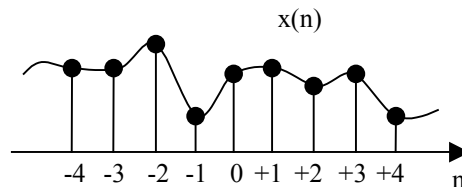
Riferimenti:

1. S.Cantarano - Dispense del corso di Elettronica
2. A.V.Oppenheim, R.W.Shafer, "Elaborazione numerica dei segnali", Ingengeria Elettrica Franco Angeli
3. E.C.Ifeachor, B.W.Jervis, "Digital Signal Processing – A practical approach", Addison-Wesley

1. FOURIER TRANSFORM

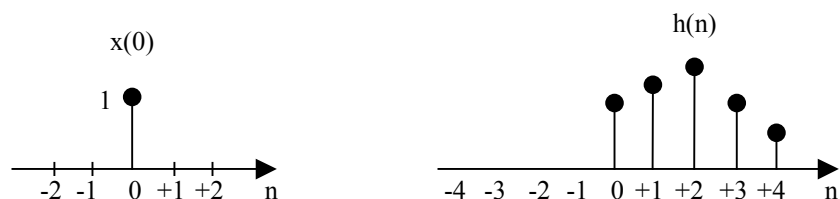
1.1 Sequenze e sistemi unidimensionali

Una sequenza tempo-discreta $x(n)$ $-\infty < n < +\infty$, può essere ricavata dal campionamento uniforme di un segnale tempo-continuo $x(t)$ $-\infty < t < +\infty$



con frequenza di campionamento $F_s = \frac{1}{T_s}$ (T_s = periodo di campionamento).

Un sistema tempo-discreto si definisce lineare e stazionario se gode delle proprietà di linearità (sovrapposizione degli effetti) e invarianza alla traslazione. Si definisce risposta impulsiva $h(n)$ del sistema la risposta al campione unitario $x(0)=1$. Un sistema fisico è causale, cioè $h(n)=0$ per $n<0$



Per la linearità e l'invarianza alla traslazione, la risposta del sistema a una sequenza di campioni

$x(n)$ sarà $y(n) = x(0)h(n) + x(-1)h(n+1) + x(-2)h(n+2) + \dots + x(1)h(n-1) + x(2)h(n-2)$

ovvero

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (1.1)$$

L'espressione (1.1) è chiamata somma di convoluzione e viene indicata $y(n) = x(n) * h(n)$.

La convoluzione gode delle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Si definisce la Fourier transform (FT) o discrete-time Fourier transform (DTFT) della sequenza $x(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (1.2)$$

e la trasformata inversa

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.3)$$

La FT è una funzione complessa, continua e periodica in ω di periodo 2π .

1.2 Proprietà della trasformata di Fourier di una sequenza (DTFT)

- Linearità: $ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

- Convoluzione reale: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$

- Traslazione reale: la trasformata di una sequenza traslata di k è data da:

$$x[n-k] \leftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}),$$

- Traslazione complessa o modulazione: $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X\{e^{j(\omega-\omega_0)}\}$

ad una traslazione complessa di ω_0 corrisponde una moltiplicazione per l'esponenziale complesso della sequenza lo spettro viene traslato in frequenza; ad es. uno spettro in banda base viene traslato, invariato nella forma, alla frequenza ω_0 .

- Inversione del tempo: $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$ (se $x[n]$ reale $X^*(e^{j\omega})$)

si inverte in corrispondenza l'asse delle frequenze.

- Coniugazione reale: $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

da cui si ricava che se $x[n]$ è reale $\leftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ la trasformata è coniugata simmetrica, cioè modulo simmetrico, fase antisimmetrica.

- Convoluzione complessa: $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$

- Teorema dell'Energia: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X_1(\omega)|^2 d\omega$

per cui l'energia può essere calcolata indifferentemente nel dominio reale o in quello complesso.

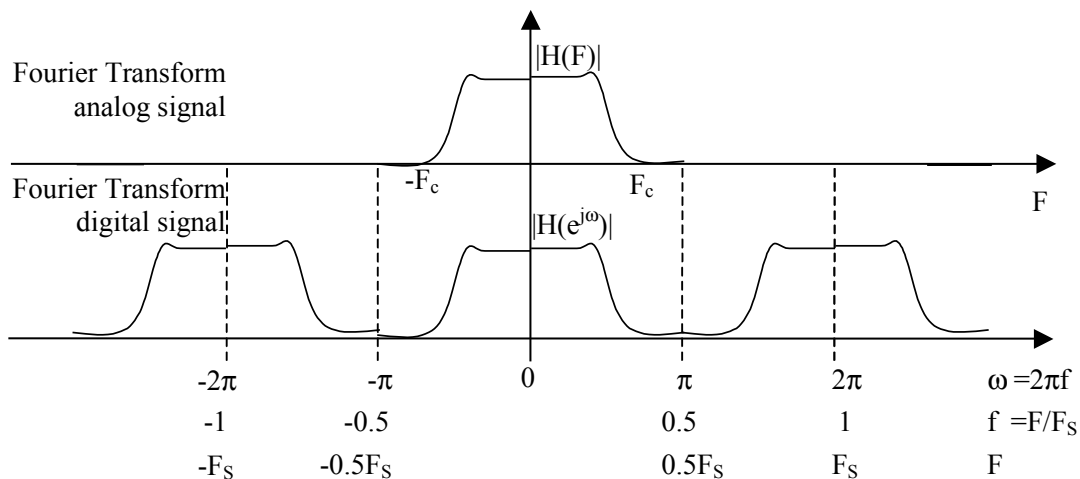
1.4 Campionamento

I segnali a tempo-discreto sono ricavati da quelli a tempo continuo mediante un campionamento periodico di frequenza $F_s = \frac{1}{T}$. Se inserisco il periodo di campionamento nella Eq.1.2, risulta

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \text{ e il periodo della DTFT diventa } \frac{2\pi}{T}. \text{ Normalmente si omette il periodo di}$$

campionamento, e si indica con ω la pulsazione normalizzata (Ω/Ω_s).

Lo spettro periodico della sequenza tempo-discreta corrisponde a quello del segnale tempo-continuo ripetuto infinite volte, come si vede dalla figura. $H(F)$ è la trasformata di Fourier del segnale continuo, $H(e^{j\omega})$ la trasformata di Fourier del segnale campionato, F_s è la frequenza di campionamento (sampling frequency), F_c è la massima frequenza del segnale (cutoff frequency), ed F ed f sono rispettivamente la frequenza e la frequenza normalizzata ($f = F/F_s$).



Per non avere aliasing, cioè sovrapposizione degli spettri, deve essere

$$F_c < 0.5F_s \quad \text{ovvero} \quad F_s > 2F_c \quad (1.7)$$

cioè il segnale continuo deve essere campionato ad una frequenza almeno doppia della sua frequenza più alta. Un segnale continuo può essere ricostruito dai suoi campioni con una formula di interpolazione

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin[(\pi/T)(t - kT)]}{(\pi/T)(t - kT)} \quad (1.8)$$

La formula data dalla Eq.(1.8) equivale a filtrare la sequenza con un filtro passa-basso analogico, ovvero farne la convoluzione con la sua risposta impulsiva. Se il segnale continuo di partenza era limitato in banda ed è stato campionato ad una frequenza opportuna (assenza di aliasing), il segnale ricostruito coincide con quello di partenza.

1.3 Risposta in frequenza di un sistema tempo-discreto

Dato un sistema definito dalla Eq.(1.1), cioè $y(n) = x(n) * h(n)$, se $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ sono le FT di $x(n)$, $h(n)$, $y(n)$ rispettivamente, per le proprietà della FT, vale la relazione

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (1.4)$$

$H(e^{j\omega})$ è detta risposta in frequenza del sistema.

$H(e^{j\omega})$ è complessa e può essere espressa in termini di risposta di ampiezza e risposta di fase

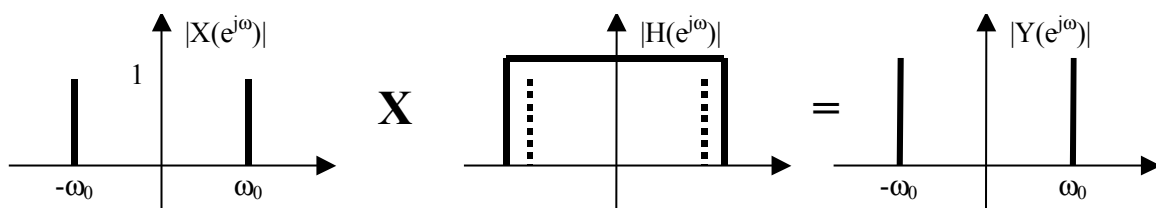
$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]} \quad (1.5)$$

La risposta in frequenza esprime anche la risposta all'ingresso sinusoidale. Infatti se

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

la sua trasformata di Fourier è $X(\omega) = \frac{A}{2} e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0)$

dove $\delta(\omega)$ corrisponde a una riga di spettro di altezza unitaria nell'origine



e la risposta complessiva sarà:

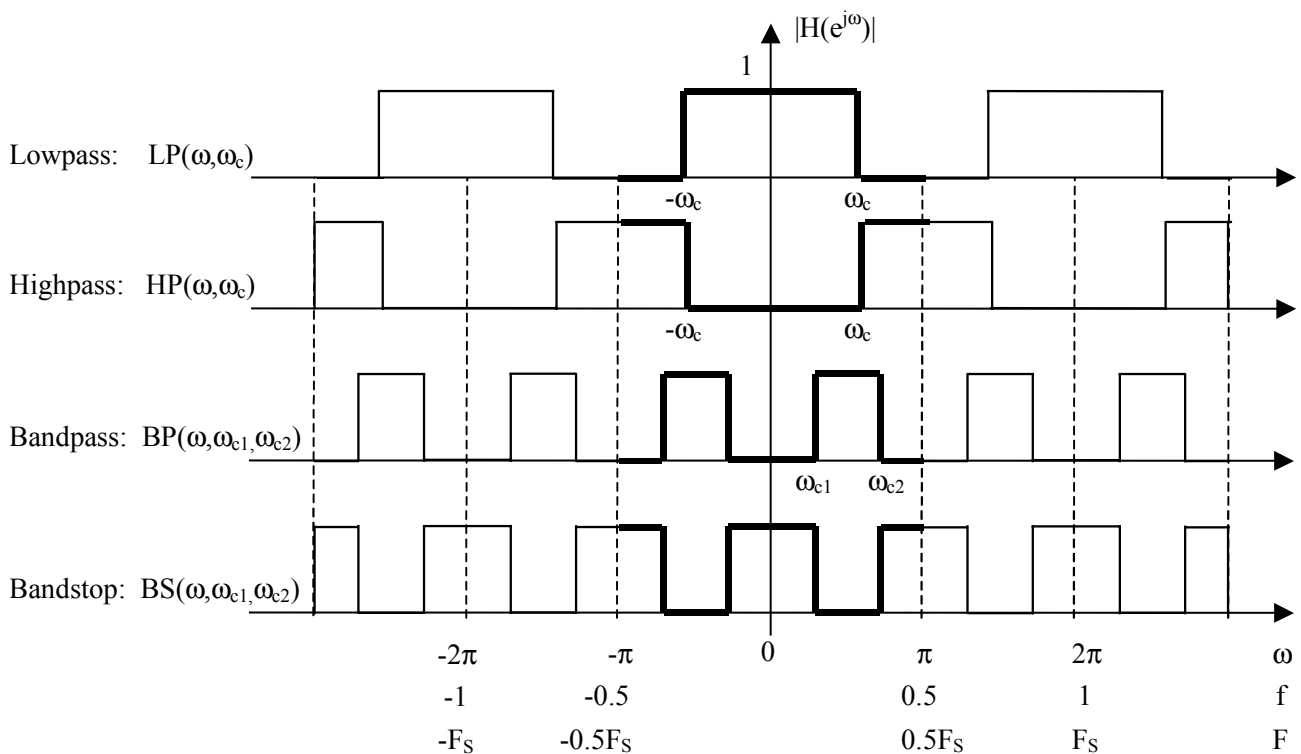
$$y(n) = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta(\omega_0)) \quad (1.6)$$

La risposta $y(n)$ è ancora una sequenza sinusoidale con uguale frequenza ω_0 , ampiezza $A |H(e^{j\omega_0})|$ e sfasamento $\theta(\omega_0)$ rispetto all'ingresso. $\theta(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})]$ indica la risposta di fase del sistema

alla frequenza ω . Il ritardo di fase è $T_p = \frac{\theta(\omega)}{\omega}$. Se la fase è lineare con ω , il ritardo di fase non

dipende dalla frequenza. In caso contrario si ha distorsione lineare di fase, perchè un segnale composto da diverse frequenze viene distorto in uscita dal filtro. Viceversa, se la risposta di ampiezza dipende dalla frequenza, si ha distorsione lineare di ampiezza. Un tipico esempio di distorsione lineare si ha nella comunicazione telefonica. Non si confonda la distorsione lineare con quella non lineare, causata dalla non linearità dei dispositivi elettronici.

La risposta in frequenza di un filtro digitale si ricava dai corrispondenti analogici ripetuti infinite volte (campionamento della risposta impulsiva), come si vede dalla figura dove sono riportati gli spettri in frequenza dei principali filtri ideali tempo-discreti (modulo della risposta in frequenza). F_c è la frequenza di cutoff.

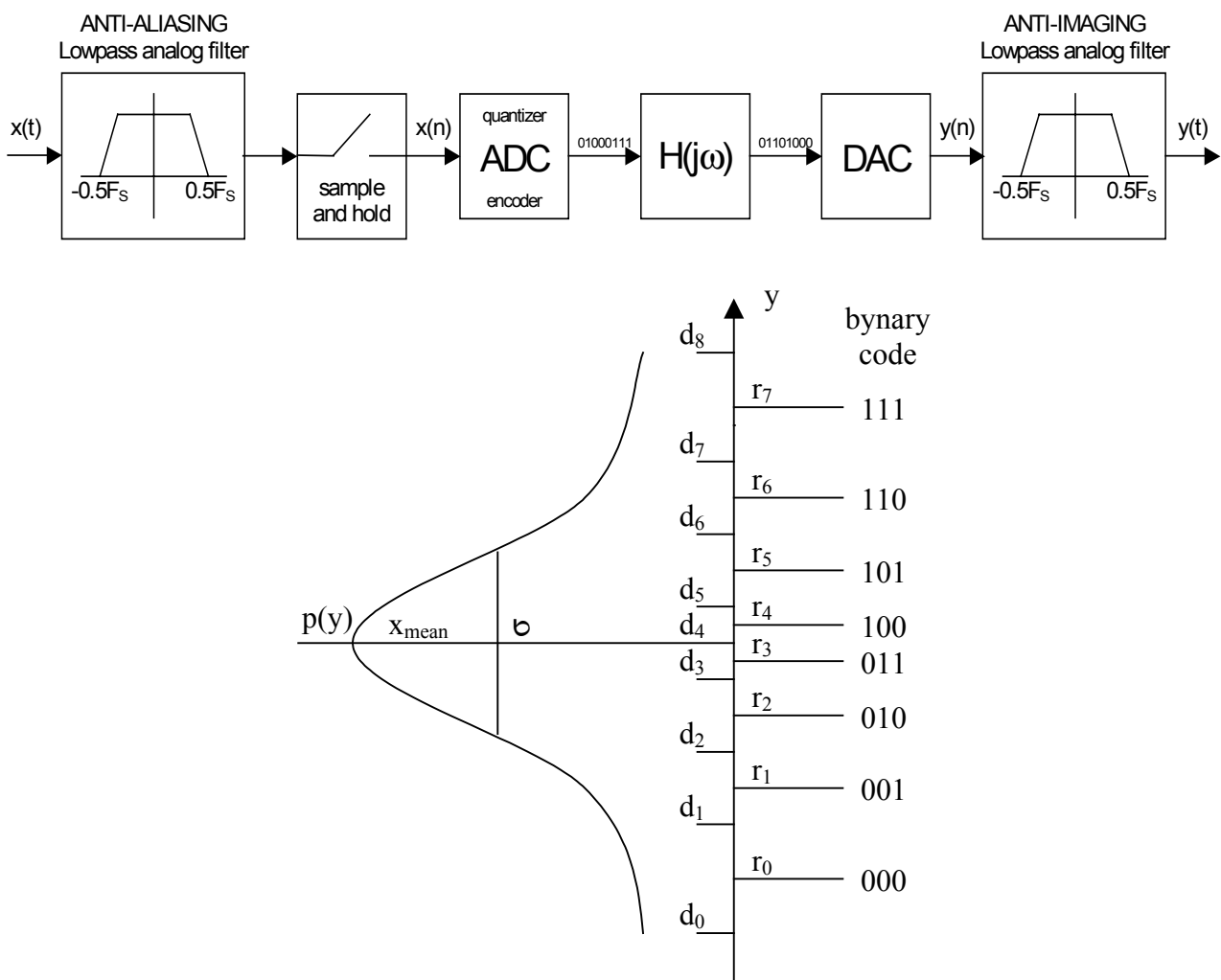


Le risposte in frequenza dei filtri diversi dal passa-basso si possono tutte ricavare da quella del filtro passa-basso (lowpass) $LP(\omega, \omega_c)$, e le corrispondenti risposte impulsive $h(n)$ si ricavano facilmente per la linearità della FT, tenendo conto che ad $H(\omega)=1$ corrisponde un campione unitario nell'origine.

	$H(\omega)$	$h(n) \quad n \neq 0$	$h(n) \quad n=0$
Highpass (HP)	$1 - LP(\omega, \omega_c)$	$- LP(n)$	$1 - LP(0)$
Bandpass (BP)	$1 - LP(\omega, \omega_{c1}) - HP(\omega, \omega_{c2})$	$- LP(n, \omega_{c1}) - HP(n, \omega_{c2})$	$1 - LP(0) - HP(0)$
Bandstop (BS)	$1 - BP(\omega, \omega_{c1}, \omega_{c2})$	$- BP(n, \omega_{c1}, \omega_{c2})$	$1 - BP(0)$

Lo schema dell'elaborazione digitale di un segnale è riportato in figura. Appresso è invece riportato un esempio di quantizzatore non uniforme dei campioni ottenuti. La quantizzazione introduce però un rumore di quantizzazione, che diminuisce aumentando il numero dei bit.

Se la frequenza di campionamento e il numero bit di codifica sono adeguati, possiamo dire che l'elaborazione digitale ha la stessa fedeltà dell'elaborazione analogica.



Decision and reconstruction levels for a non uniform 3-bit quantizer with a Gaussian probability density $p(y)$.

1.5 Sistemi e sequenze bidimensionali

Data una sequenza bidimensionale $x(m,n)$, e un sistema bidimensionale lineare e stazionario, si può scrivere, analogamente al caso unidimensionale

$$y(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r) h(m-k, n-r) \quad (1.9)$$

La DTFT bidimensionale è definita come

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \quad (1.10)$$

e la trasformata inversa come

$$x(m,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 m} e^{j\omega_2 n} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.11)$$

Si definisce funzione di trasferimento bidimensionale del sistema

$$Y(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \quad (1.12)$$

Si dice che $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ è separabile se può essere espressa nella forma

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_1(e^{j\omega_1}) H_2(e^{j\omega_2}) \quad (1.13)$$

2. LA TRASFORMATA Z

La trasformata Z di una sequenza è definita come

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.1)$$

dove $z = r e^{j\omega}$ è una variabile complessa. La Eq.2.1.1 si può riscrivere come

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n} \quad (2.2)$$

che, per $r=1$, cioè per $|z|=1$, coincide con la trasformata di Fourier di $x(n)$.

La trasformata Z inversa è calcolata usando il teorema dei residui e le proprietà della trasformata Z (vedi riferimenti).

Per un sistema lineare e stazionario vale una relazione equivalente alla Eq.1.4

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (2.3)$$

dove $H(z)$ è detta funzione di trasferimento del sistema, che, calcolata sul circolo unitario ($r=1$, $z=e^{j\omega}$), coincide con la risposta in frequenza del sistema $H(e^{j\omega})$.

La trasformata Z bidimensionale

$$X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n} \quad (2.4)$$

Si dice che $H(z_1, z_2)$ è separabile se può essere espressa nella forma

$$H(z_1, z_2) = H_1(z_1) H_2(z_2) \quad (2.5)$$

3. DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT - FFT)

Considerata una sequenza di durata finita N , la sequenza periodica che si ottiene da questa concatenando infinite volte la sequenza di durata finita si può sviluppare in serie di armoniche di Fourier, cioè come somma di esponenziali complessi con frequenze multiple della frequenza fondamentale $F = \frac{1}{NT}$ ($f = \frac{1}{N}$, $\omega = \frac{2\pi}{N}$, normalizzate) della sequenza periodica di periodo N

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.1)$$

dove la sommatoria si arresta ad $N-1$ perché le frequenze sono ciclicamente le stesse.

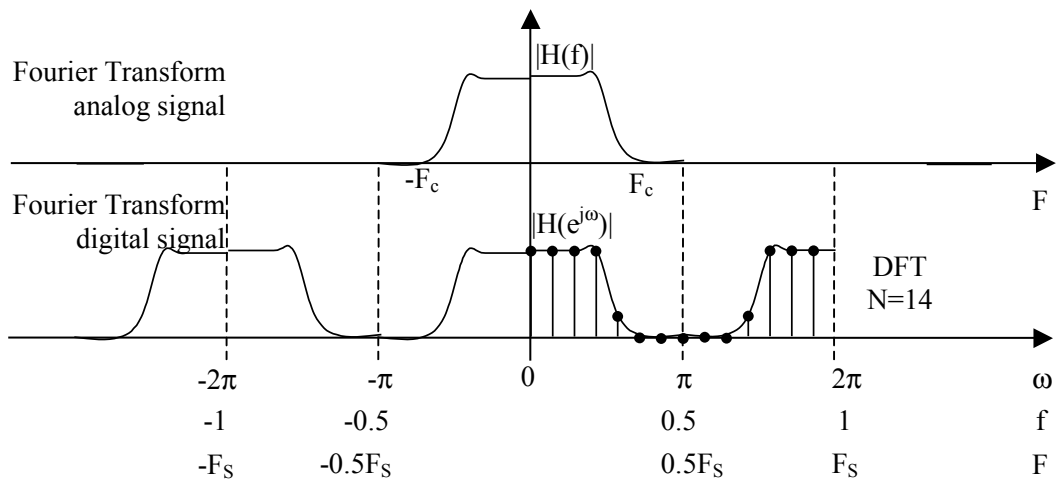
Gli N coefficienti della serie si possono calcolare dall'espressione

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.2)$$

La sequenza definita dalla Eq.3.2 rappresenta la discrete Fourier transform (DFT) e la Eq.3.1 la sua inversa.

Dalla Eq.3.2 si vede che la DFT corrisponde a prendere N campioni equispaziati della trasformata di Fourier a frequenze multiple della fondamentale, cioè $X(k) = X(e^{j\omega_k}) = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$.

La DFT serve a fornire un'approssimazione dello spettro di una segnale (analogico o digitale). Per calcolarla si usa un'algoritmo ottimizzato (Fast Fourier Transform o FFT). Poiché il numero di campioni della DFT (o FFT) è uguale al numero di campioni della sequenza, più è lunga la sequenza e migliore è l'approssimazione dello spettro.



DFT bidimensionale

$$x(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{h=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(h, k) e^{j\frac{2\pi}{M}hm} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.4)$$

$$X(h, k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) e^{-j\frac{2\pi}{M}hm} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.5)$$

Nel caso di sequenze separabili

$$x(m, n) = x_1(m) x_2(n) \quad (3.6)$$

$$X(h, k) = X_1(h) X_2(k) \quad (3.7)$$

Per la convoluzione si estendono facilmente le considerazioni fatte nel caso unidimensionale.

Se $x_1(m, n)$ ha area (M_1, N_1) ed $x_2(m, n)$ ha area (M_2, N_2) , le DFT saranno calcolate su un'area $(M_1 + M_2 - 1, N_1 + N_2 - 1)$.

3.2 Correlazione

Ci sono due forme di correlazione: autocorrelazione e intercorrelazione (cross-correlation).

La funzione di intercorrelazione (CCF) è una misura della *somiglianza* tra due segnali.

Applicazioni della CCF includono - analisi spettrale (cross-spectral analysis) - riconoscimento di segnali immersi nel rumore (radar) - riconoscimento di modelli (pattern matching) - misure di ritardo.

Date due sequenze di lunghezza N , $x(k)$ e $y(k)$, con valor medio nullo, una stima della cross-correlazione è data da:

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{[r_{xx}(0) r_{yy}(0)]^{1/2}} \quad \text{dove} \quad r_{xy}(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k) y(k+n) & n = 0, +1, +2 \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N+n-1} x(k-n) y(k) & n = 0, -1, -2 \end{cases} \quad (3.8)$$

mentre $r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [x(k)]^2$ $r_{yy}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(k)]^2$ sono fattori di normalizzazione.

Il valore di $\rho_{xy}(n)$ varia tra -1 e +1. +1 e -1 significano 100% di correlazione, rispettivamente concorde e discorde (es. segnali in opposizione di fase), 0 significa che i segnali sono completamente scorrelati (indipendenti).

La funzione di autocorrelazione (ACF) è una forma speciale di CCF ed è usata in applicazioni simili. E' particolarmente utile nel riconoscere un segnale periodico immerso nel rumore.

Una stima dell'autocorrelazione di una sequenza $x(k)$ di lunghezza N e valor medio nullo è data da

$$\rho_{xx}(n) = \frac{r_{xx}(n)}{r_{xx}(0)} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad \text{dove} \quad r_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-n-1} x(k) x(k+n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (3.8)$$

Estrazione di una sequenza periodica da rumore.

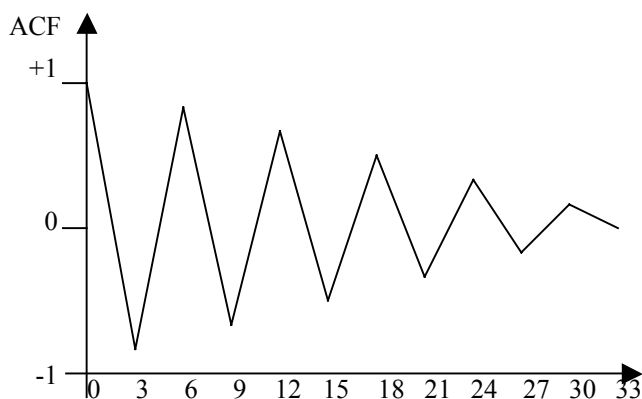
La ACF di una sequenza random (es. rumore bianco) avrà un picco per $n=0$ e poi oscillerà intorno a zero per $n \neq 0$. La ACF di una sequenza periodica è ancora periodica con lo stesso periodo.

Le CCF e ACF sono utili per discriminare una sequenza periodica immersa nel rumore.

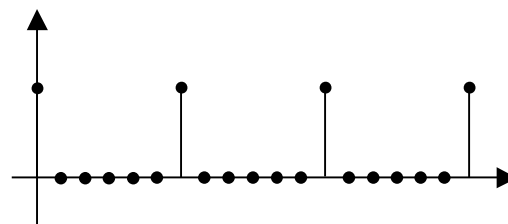
Esistono due metodi:

1. se si conosce approssimativamente la forma della sequenza, si calcola la CCF della sequenza con una sequenza modello (template) modificabile finché la CCF non è massima. La sequenza modello così ottenuta è una stima della sequenza senza rumore.

2. si determina il periodo della sequenza calcolandone la ACF, e poi si calcola la CCF della sequenza con un treno di impulsi $\delta(n-kN_p)$ di periodo N_p uguale a quello della sequenza. La CCF è una stima della sequenza.



Autocorrelazione di una sequenza periodica di lunghezza $L=33$ e periodo $N_p=6$.



Treno di impulsi di periodo $N_p=6$.

Calcolo nel dominio della frequenza.

Il teorema di correlazione afferma che:

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N} F^{-1} [X_1^*(k) X_2(k)] \quad (3.10)$$

cioè la correlazione di due sequenze si può calcolare dai prodotti delle DFT e poi antitrasformare.

Questo metodo è conveniente quando le sequenze sono piuttosto lunghe, perché è più veloce calcolare le FFT che direttamente la correlazione. In particolare per l'autocorrelazione

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{N} F^{-1} |X(k)|^2 \quad (3.11)$$

3.3 Convoluzione e correlazione di sequenze sezionate

Quando si calcola la convoluzione o la correlazione tra due sequenze può capitare che una di esse non abbia durata finita, o comunque abbia durata superiore alle lunghezze dei registri che la deve contenere. In questi casi bisogna operare un sezionamento di tale sequenza in segmenti di sequenza più corti. Supposto che i segmenti abbiano durata L e l'altra sequenza M , uguale o diversa, la convoluzione o correlazione dei segmenti avrà durata $L+M-1$. Per ottenere la convoluzione o

correlazione delle sequenze originarie bisogna sovrapporre (overlap) quella ottenuta dai segmenti di $M-1$ punti. Per operare correttamente bisogna però che le sequenze limitate su cui si opera abbiano entrambe lunghezza $L+M-1$ aggiungendo $M-1$ zeri ad una ed $L-1$ zeri all'altra. Il metodo di sovrapposizione e somma prevede quindi di concatenare i risultati ottenuti, sovrapponendoli e sommandoli di $M-1$ punti. Il metodo si estende facilmente al caso in cui entrambe le sequenze abbiano durata infinita, purché vengano sezionate in segmenti di uguale lunghezza.

In particolare, se si vuole calcolare il prodotto di convoluzione o di correlazione nel dominio della frequenza, le DFT vanno calcolate ancora su $L+M-1$ punti, e la sequenza ottenuta per antitrasformazione va trattata col metodo appena visto.

Quando si calcola la correlazione di sequenze segmentate (tempo reale), l'errore dovuto alla lunghezza finita N delle sequenze può essere minimizzato se:

- 1) $T=N \times T_s \geq 5 T_p$ dove T_p è il periodo della più bassa componente di frequenza di interesse;
- 2) si sovrappongono i dati per non più di $1/5$ della loro lunghezza ($n \leq N / 5$).

Per esempio, se si devono correlare segnali vocali telefonici con una banda da 300 Hz a 3.4 KHz, campionati a 8 KHz, $T_p=1/F_{\min}=3.33$ msec. La lunghezza minima accettabile dei dati sarebbe $T=5 \times 3.3=16.7$ msec, corrispondente a $N=T/T_s=T \times F_s=16.7 \times 8=133$ campioni, e il massimo shift di correlazione sarà $T_p=3.33$ msec, o $n=N/5=26$ campioni.

3.5 Stima dello Spettro di Potenza

Lo spettro di potenza di una sequenza è definito come il quadrato del modulo della FT

$$S(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2$$

In pratica, per una sequenza di durata L si calcola la DFT, e la risoluzione risultante in frequenza sarà $\Delta f = F_s / L$.

Dal teorema della correlazione (Eq.3.10) consegue anche che la trasformata di Fourier della ACF equivale allo spettro di potenza della sequenza

$$F[p_{xx}(n)] = \frac{1}{N} |X(k)|^2$$

Tuttavia lo spettro di potenza calcolato su segmenti successivi di una sequenza (FFT) può presentare una fluttuazione eccessiva, per cui bisogna ricorrere a delle operazioni di media. Esistono diversi metodi che operano una media nel dominio del tempo, sulla sequenza o sulla ACF, o nel dominio della frequenza direttamente sugli spettri di segmenti consecutivi, oppure su entrambi. Nel dominio del tempo si usano usando le funzioni window, cioè funzioni diverse da zero in un intervallo intorno a zero. Tali finestre vengono moltiplicate alla sequenza o alla sua ACF, applicando la proprietà per cui il prodotto nel tempo equivale alla convoluzione dei rispettivi spettri (convoluzione complessa).

Uno dei più popolari è il metodo di Blackman e Tukey, che applica una funzione window triangolare di lunghezza $2M-1$ alla ACF di lunghezza N

$$S_{BT}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} p_{xx}(m) w(m) e^{-j2\pi f m} \quad w(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{M} & |m| < M \\ 0 & |m| \geq M \end{cases} \quad (3.11)$$

dove la ACF può essere calcolata direttamente o attraverso la FFT.

Un altro è quello di Welch, in cui la sequenza di lunghezza N viene suddivisa in sotto-segmenti parzialmente sovrapposti di lunghezza L , di cui si calcola la DFT

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{L-1} w(n) x_i(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{L} kn\right) \quad 0 \leq k \leq L-1 \quad (3.12)$$

$$S_i(k) = \frac{1}{LQ} |X_i(k)|^2 \quad S(k) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} S_i(k) \quad 0 \leq k \leq L/2 \quad (3.13)$$

dove $w(n)$ è una window, $Q = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n)$ è l'energia della window, ed $S(k)$ la media degli spettri.

4. FILTRI DIGITALI

I sistemi lineari invarianti alla traslazione si dividono in due categorie:

sistemi FIR (finite impulse response) che hanno risposta all'impulso $h(n)$ di durata finita;

sistemi IIR (infinite impulse response) che hanno risposta all'impulso $h(n)$ di durata infinita;

Esiste poi una sottoclasse di sistemi lineari stazionari che sono definiti dall'equazione

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad -\infty < n < +\infty \quad (4.1)$$

I sistemi definiti dall'Eq.4.1 sono evidentemente sistemi IIR se $N>0$, mentre nel caso in cui $N=0$ corrispondono a un sistema FIR. I sistemi IIR sono evidentemente sistemi con memoria.

Se si ragiona a livello di sequenze anziché di campioni, la sequenza $y(n)$ è una combinazione lineare delle sequenze ritardate di uscita $y(n-1)$, $y(n-2)$, ..., $y(n-N)$, e delle sequenze ritardate di ingresso $x(n-1)$, $x(n-2)$, ..., $x(n-M)$. Vogliamo calcolare la funzione di trasferimento di questo sistema. Dalla proprietà di traslazione, la trasformata Z di $x(n-k)$ è $z^{-k}X(z)$, quindi si ricava

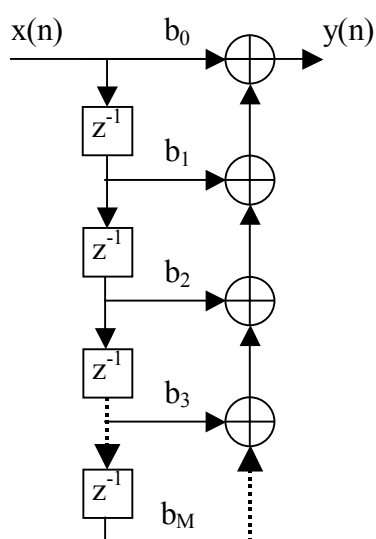
facilmente che $Y(z) = \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$, per cui la funzione di trasferimento del

sistema descritto dalla Eq.4.1 è una funzione razionale

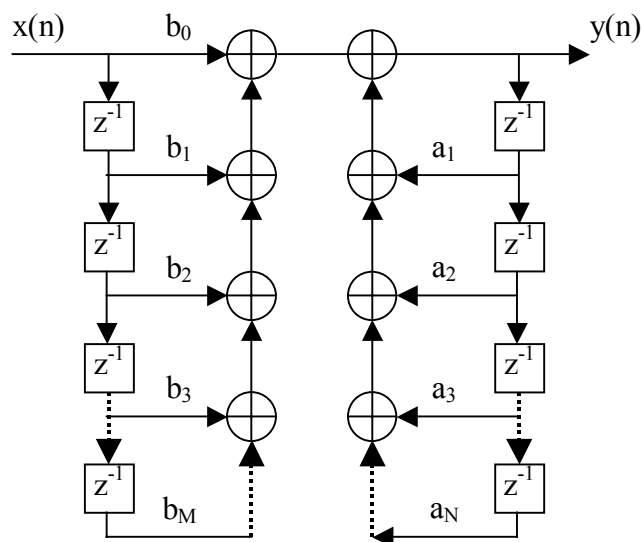
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.2)$$

nel caso di un sistema IIR, o un polinomio $H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$ nel caso di un sistema FIR.

Si vede che per realizzare sistemi del genere servono 3 tipi di elementi: sommatori, moltiplicatori per una costante, elementi di ritardo (registri). Esiste poi una sottoclasse di sistemi IIR e FIR costituita dai filtri digitali, che sono l'equivalente digitale dei corrispondenti filtri analogici (passa-basso, passa-alto, passa-banda, ecc.). Dopo avere calcolato i coefficienti della funzione di trasferimento (4.2) con tecniche che si trovano in letteratura (vedi riferimenti), si passa all'implementazione del filtro con strutture di calcolo schematizzabili come in figura, o loro varianti, che consentono al sistema di operare in tempo reale su una sequenza di ingresso.



Struttura di un sistema FIR



Struttura di un sistema IIR

5. INTRODUCTION TO DIGITAL FILTERS

5.1 Comparison with Analogue Filters

The following are the main advantages of digital filters compared with analogue filters:

1. Digital filters can have truly linear phase response.
2. The performance of a digital filter does not vary with environmental changes.
3. The frequency response of a digital filter can be automatically adjusted by a programmable processor (adaptive filters).
4. Several input signals can be filtered by the same digital filter.
5. VLSI technology allows fabrication of digital filters of small size, low power and low cost.
6. With digital filter the precision is limited only by the word length used.
7. The performance of digital filters is repeatable.
8. Digital filters can be used at very low frequency (biomedical applications).
9. Digital filters can work over a wide range of frequency by a mere change of the sampling frequency.

The following are the main disadvantages of digital filters compared with analogue filters:

1. Speed limitation. In real time situations, ADC and DAC devices introduce a speed constraint on digital filter performance.
2. Finite wordlength effects. Digital filter are subjected to ADC noise resulting from quantizing a continuous signal.
3. Long design and development times. Especially hardware development can be much longer than for analogue filters.

5.2 Choosing between FIR and IIR filters

1. FIR filters can have exactly linear phase → no phase distortion
2. FIR filters realized nonrecursively are always stable. The stability of IIR filters cannot be guaranteed.
3. The effects of finite wordlength effects to implement filters are much less severe in FIR filters.
4. FIR requires more coefficients for sharp cutoff filters than IIR.
5. Analogue filters can be readily transformed into equivalent IIR filters
6. With FIR it is easier to synthesize filters of arbitrarily frequency response.
7. FIR is algebraically more difficult to synthesize, if CAD support is not available.

From the above, a broad guideline on when use FIR or IIR would be as follows.

- Use IIR when the only important requirements are sharp cutoff filters and high throughput.
- Use FIR if the number of filter coefficients is not too large and, in particular, if little or no phase distortion is desired.

5.3 Filter Design Steps

The design of a digital filter involves five steps:

1. specification of the filter requirements;
2. calculation of suitable filter coefficients;
3. representation of the filter by a suitable structure;
4. analysis of the effects of finite wordlength on filter performance;

5. implementation of filter in software and/or hardware.

5.5 Linear Phase Response

The frequency response of a FIR filter is

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-j\omega k} \quad (6.3)$$

If a signal consists of several frequency components, the phase delay of the filter is the amount of time delay of each frequency components going through the filter. The group delay is the average time delay of the composite signal. Mathematically the parameters are defined as

$$\text{phase delay} \quad T_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (6.4)$$

$$\text{group delay} \quad T_g = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (6.5)$$

A filter is said to have a linear phase response if its phase response satisfies one of the following relationship:

$$\theta(\omega) = -\alpha \omega \quad (6.6a)$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha \omega \quad (6.6b)$$

If a filter satisfies condition (6.6a) it will have both constant group and constant phase delay response.

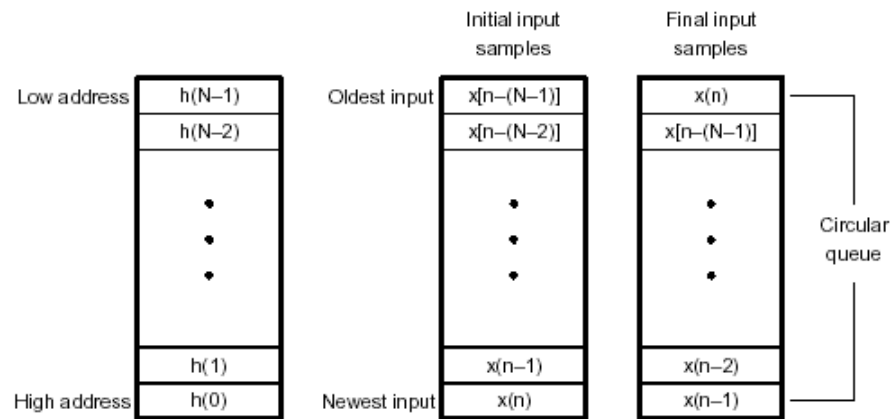
It can be shown that for condition (6.6a) to be satisfied the impulse response of the filter must have positive symmetry:

$$\begin{aligned} h(n) &= h(N - n - 1) & \begin{cases} n = 0, 1, \dots, (N-1)/2 & (N \text{ odd}) \\ n = 0, 1, \dots, N/2 - 1 & (N \text{ even}) \end{cases} \\ \alpha &= (N-1)/2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

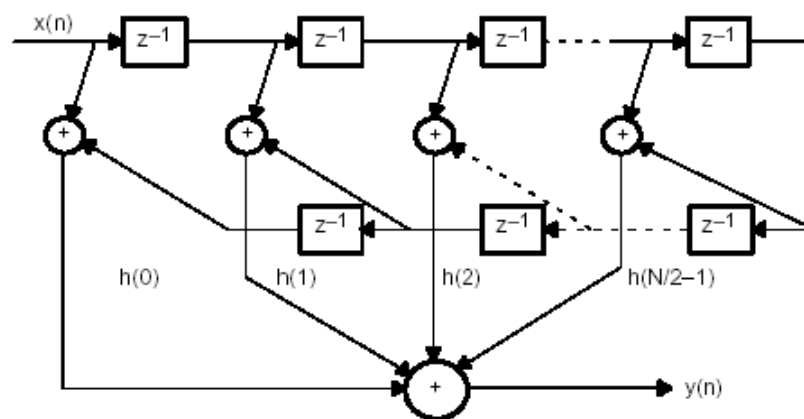
When the condition (6.6b) only is satisfied the filter will have a constant group delay only. In this case the impulse response of the filter has negative symmetry

$$\begin{aligned} h(n) &= -h(N - n - 1) \\ \alpha &= (N-1)/2 \quad \beta = \pi/2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

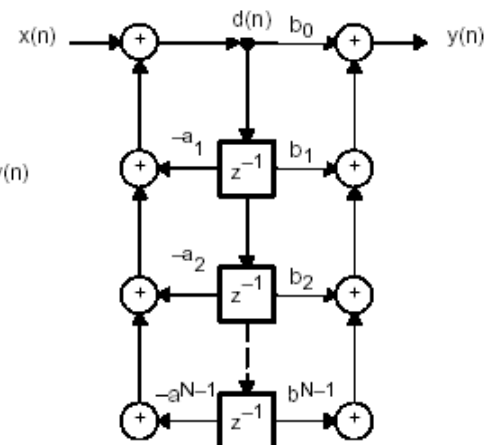
Data Memory Organization in an FIR Filter



Block Diagram of an Nth-Order Symmetric FIR Filter



Nth-Order Direct-Form Type II IIR Filter



Biquad IIR Filter

